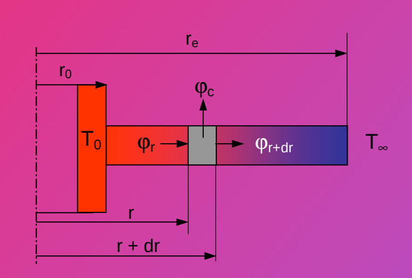
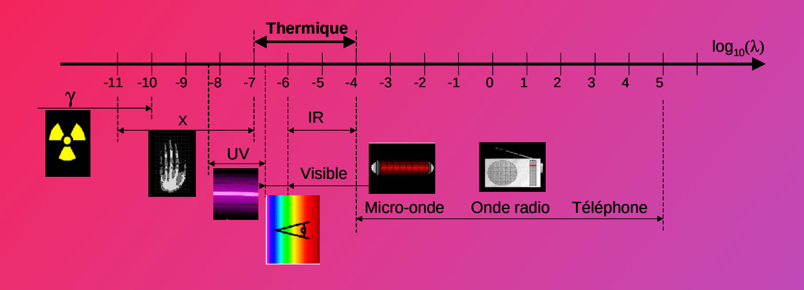
Ecole des Mines Nancy

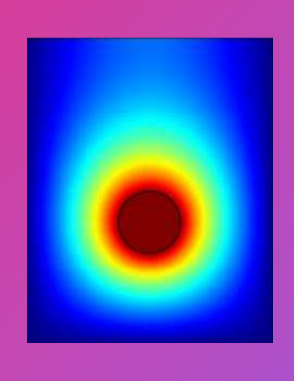
2ème année

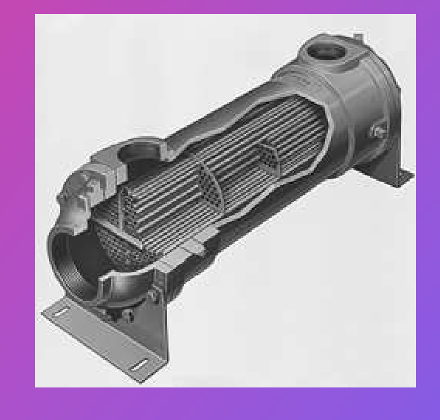


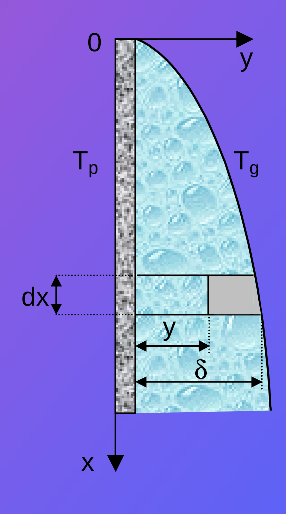




TRANSFERTS THERMIQUES







Yves JANNOT

2012

NOMENCLATURE

a Diffusivité thermique
Bi Nombre de Biot
c Chaleur spécifique
D Diamètre
e Epaisseur
E Effusivité thermique
f Facteur de forme de rayonnement
F Coefficient de forme de conduction
Fo Nombre de Fourier
g Accélération de la pesanteur
Gr Nombre de Grashof
h Coefficient de transfert de chaleur par convection
ΔH Chaleur latente de changement de phase
I Intensité énergétique
J Radiosité
L Longueur, Luminance
$\dot{m}$ Débit massique
M Emittance
Nu Nombre de Nusselt
NUT Nombre d'unités de transfert
p Variable de Laplace
p_e Périmètre
Q Quantité de chaleur
qc Débit calorifique
r, R Rayon, Résistance
Rc Résistance de contact
Re Nombre de Reynolds
S Surface
t Temps
T Température
u Vitesse
V Volume
x, y, z Variables d'espace

Lettres grecques

α Coefficient d'absorption du rayonnement
β Coefficient de dilatation cubique
ε Emissivité
ϕ Densité de flux de chaleur
Φ Transformée de Laplace du flux de chaleur
φ Flux de chaleur
λ Conductivité thermique, longueur d'onde
μ Viscosité dynamique
ν Viscosité cinématique
η Rendement ou efficacité
Ω Angle solide
ρ Masse volumique, coefficient de réflexion du rayonnement
σ Constante de Stefan-Boltzmann
τ Coefficient de transmission du rayonnement
θ Transformée de Laplace de la température

1. GENERALITES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR

1.1 Introduction

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre.

La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

1.2 Définitions

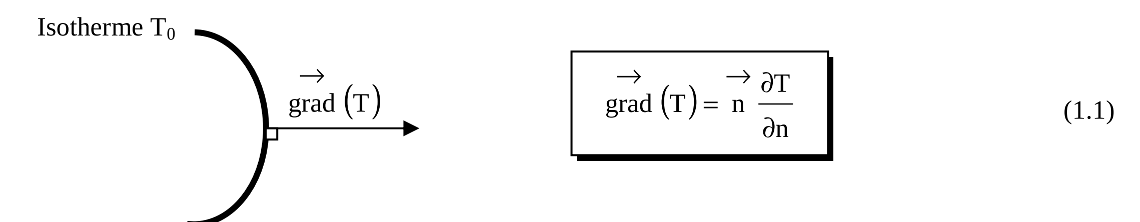
1.2.1 Champ de température

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : T = f (x,y,z,t). La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé <u>champ de température</u>. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit <u>permanent</u> ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit <u>variable</u> ou transitoire.

1.2.2 Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :



$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \vec{n}\,\frac{\partial T}{\partial n} \qquad (1.1)$$

Figure 1.1 : Isotherme et gradient thermique

Avec : $\vec{n}$ vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$ dérivée de la température le long de la normale.

1.2.3 Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\phi = \frac{1}{S}\frac{dQ}{dt} \qquad (1.2)$$

Où S est l'aire de la surface (m^2).

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps :

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \qquad (1.3)$$

1.3 Formulation d'un problème de transfert de chaleur

1.3.1 Bilan d'énergie

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :

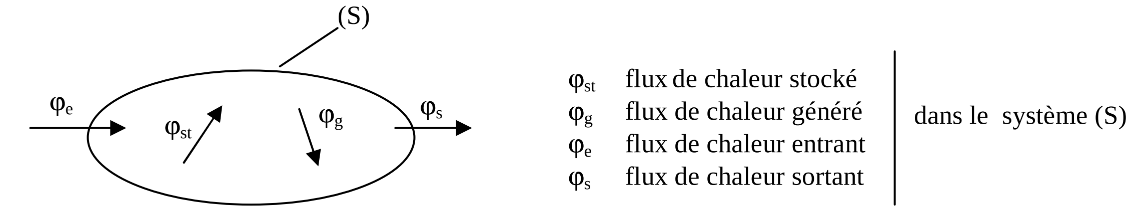


Figure 1.2 : Système et bilan énergétique

On applique alors le 1er principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S) :

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st} \qquad (1.4)$$

1.3.2 Expression des flux d'énergie

Il faut ensuite établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, on obtient l'équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

1.3.2.1 Conduction

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda\ S\ \overrightarrow{\text{grad}}\,(T) \qquad (1.5)$$

Ou sous forme algébrique :

$$\varphi = -\lambda\ S\ \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (1.6)$$

Avec :

	φ	Flux de chaleur transmis par conduction	(W)
	λ	Conductivité thermique du milieu	($W\ m^{-1}\ °C^{-1}$)
	x	Variable d'espace dans la direction du flux	(m)
	S	Aire de la section de passage du flux de chaleur	(m^2)

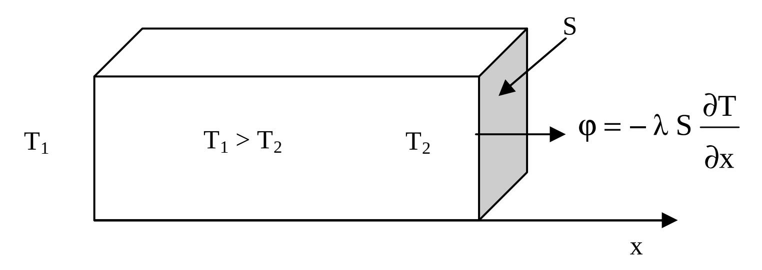


Figure 1.3 : Schéma du transfert de chaleur conductif

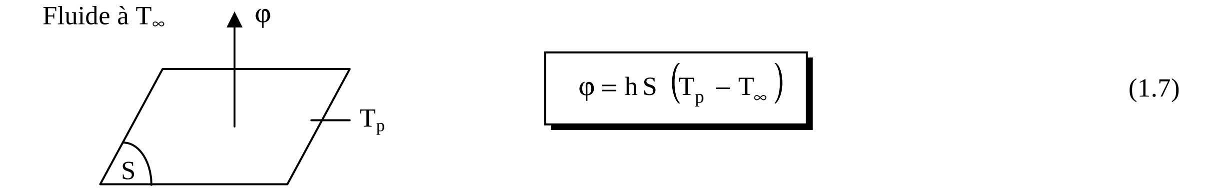
On trouvera dans le tableau 1.1 les valeurs de la conductivité thermique λ de certains matériaux parmi les plus courants. Un tableau plus complet est donné en annexe A.1.1.

Tableau 1.1 : Conductivité thermique de certains matériaux

Matériau	λ (W.m^{-1}. °C^{-1})	Matériau	λ (W.m^{-1}. °C^{-1})
Argent	419	Plâtre	0,48
Cuivre	386	Amiante	0,16
Aluminium	204	Bois (feuillu-résineux)	0,12-0,23
Acier doux	45	Liège	0,044-0,049
Acier inox	15	Laine de roche	0,038-0,041
Glace	1,88	Laine de verre	0,035-0,051
Béton	1,4	Polystyrène expansé	0,036-0,047
Brique terre cuite	1,1	Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045
Verre	1,0	Polystyrène extrudé	0,028
Eau	0,60	Air	0,026

1.3.2.2 Convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :



$$\varphi = h\,S\,\left(T_p - T_\infty\right) \qquad (1.7)$$

Figure 1.4 : Schéma du transfert de chaleur convectif

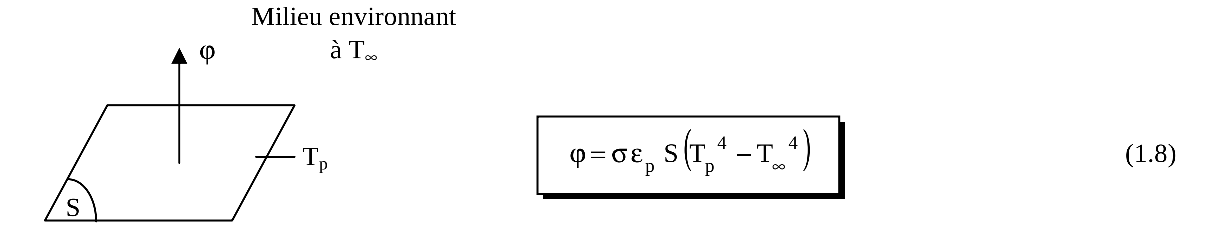
Avec :

φ	Flux de chaleur transmis par convection	(W)
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection	(W m^{-2} °C^{-1})
T_p	Température de surface du solide	(°C)
T_∞	Température du fluide loin de la surface du solide	(°C)
S	Aire de la surface de contact solide/fluide	(m^2)

Remarque : La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

1.3.2.3 Rayonnement

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation :



$$\varphi = \sigma\, \varepsilon_p\, S \left(T_p^{\ 4} - T_\infty^{\ 4} \right) \qquad (1.8)$$

Figure 1.4 : Schéma du transfert de chaleur radiatif

Avec :	φ	Flux de chaleur transmis par rayonnement	(W)
	σ	Constante de Stefan	($5{,}67.10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4})
	ε_p	Facteur d'émission de la surface	
	T_p	Température de la surface	(**K**)
	T_∞	Température du milieu environnant la surface	(**K**)
	S	Aire de la surface	(m^2)

1.3.2.4 Flux de chaleur lié à un débit massique

Lorsqu'un débit massique $\dot{m}$ de matière entre dans le système à la température T_1 et en ressort à la température T_2, on doit considérer dans le bilan (1.5) un flux de chaleur entrant correspondant :

$$\varphi_e = \dot{m}\, c_p\, (T_1 - T_2) \qquad (1.9)$$

Avec :	φ_e	Flux de chaleur entrant dans le système	(W)
	$\dot{m}$	Débit massique	($kg.s^{-1}$)
	c	Chaleur spécifique	($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
	T_1, T_2	Températures d'entrée et de sortie	(K)

1.3.2.5 Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante et en l'absence de changement d'état) :

$$\varphi_{st} = \rho\, V\, c\, \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (1.10)$$

Avec :	φ_{st}	Flux de chaleur stocké	(W)
	ρ	Masse volumique	(kg m^{-3})
	V	Volume	(m^3)
	c	Chaleur spécifique	(J kg^{-1} $°C^{-1}$)
	T	Température	(°C)
	t	Temps	(s)

Le produit ρVc est appelé la <u>capacitance thermique</u> du corps.

1.3.2.6 Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme :

$$\varphi_g = \dot{q}\, V \qquad (1.11)$$

Avec :	φ_g	Flux d'énergie thermique générée	(W)
	$\dot{q}$	Densité volumique d'énergie générée	(W m^{-3})
	V	Volume	(m^3)

2 TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME PERMANENT

2.1 L'équation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

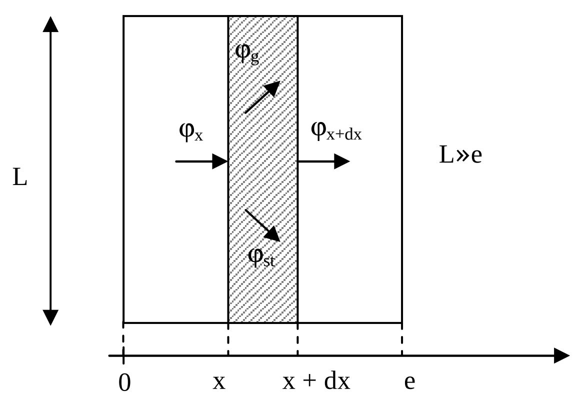


Figure 2.1 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox. Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st}$$

Avec : $\varphi_x = -\left(\lambda\ S\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_x$ et $\varphi_{x+dx} = -\left(\lambda\ S\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$

$$\varphi_g = \dot{q}\ S\ dx$$

$$\varphi_{st} = \rho\, c\, S\, dx\, \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx, nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda\, S\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda\, S\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + \dot{q}\, S = \rho\ c\ \ S\frac{\partial T}{\partial t}$$

Soit : $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\, S\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q}\ S = \rho\, c\, S\ \dfrac{\partial T}{\partial t}$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'<u>équation de la chaleur</u> dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho\, c\, \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.1)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$

b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$

c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

Les hypothèses a) + b) +c) permettent d'écrire :

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{d\lambda}{dT}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] = \rho\ c\ \ \frac{\partial T}{\partial t}$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a\ \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.2)$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho\, c}$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau. On en trouvera des valeurs en annexe A.1.1.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \qquad (2.3)$$

Par ailleurs, les hypothèses a), c) et d) permettent d'écrire :

- Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.4)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de t, l'équation (2.4) peut s'écrire sous forme simplifiée : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$

- Equation de la chaleur en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\,T)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.5)$$

2.2 Transfert unidirectionnel

2.2.1 Mur simple

On se placera dans le cas où le transfert de chaleur est unidirectionnel et où il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

On considère un mur d'épaisseur e, de conductivité thermique λ et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 :

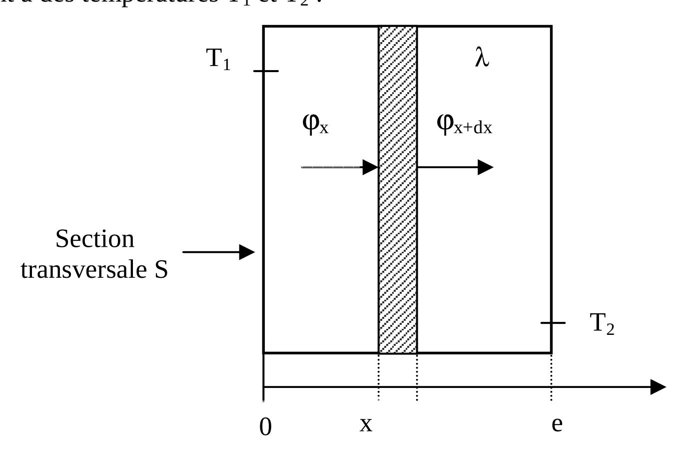


Figure 2.2 : Bilan thermique élémentaire sur un mur simple

En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et x + dx, il vient :

$$\varphi_x = \varphi_{x+dx} \quad \Rightarrow \quad -\lambda\, S \left(\frac{dT}{dx}\right)_x = -\lambda\, S \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}$$

D'où $\quad \dfrac{dT}{dx} = A \quad$ et $T(x) = A\,x + B$

Avec les conditions aux limites : $\quad T\,(x = 0) = T_1 \quad$ et $\quad T\,(x = e) = T_2$

D'où :

$$\boxed{T = T_1 - \frac{x}{e}\left(T_1 - T_2\right)} \tag{2.6}$$

Le profil de température est donc linéaire. La densité de flux de chaleur traversant le mur s'en déduit par la relation : $\phi = -\lambda \dfrac{dT}{dx}$, d'où :

$$\boxed{\phi = \frac{\lambda\,\left(T_1 - T_2\right)}{e}} \tag{2.7}$$

La relation (2.7) peut également se mettre sous la forme : $\varphi = \dfrac{\left(T_1 - T_2\right)}{\dfrac{e}{\lambda S}}$, cette relation est analogue à la loi d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme $\dfrac{e}{\lambda S}$ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur e, de conductivité thermique λ et de surface latérale S. On se ramène donc au schéma équivalent représenté sur la figure 2.3.

φ

T_1 —/\/\/\/\/\— T_2

$R = \dfrac{e}{\lambda S}$

Figure 2.3 : Schéma électrique équivalent d'un mur simple

2.2.2 Mur multicouches

C'est le cas des murs réels (schématisé sur la figure 2.4) constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale S.

En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

$$\varphi = h_1\, S\left(T_{f1} - T_1\right) = \frac{\lambda_A\, S\left(T_1 - T_2\right)}{e_A} = \frac{\lambda_B\, S\left(T_2 - T_3\right)}{e_B} = \frac{\lambda_C\, S\left(T_3 - T_4\right)}{e_C} = h_2\, S\left(T_4 - T_{f2}\right)$$

D'où :

$$\boxed{\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\dfrac{1}{h_1\, S} + \dfrac{e_A}{\lambda_A\, S} + \dfrac{e_B}{\lambda_B\, S} + \dfrac{e_C}{\lambda_C\, S} + \dfrac{1}{h_2\, S}}} \tag{2.8}$$

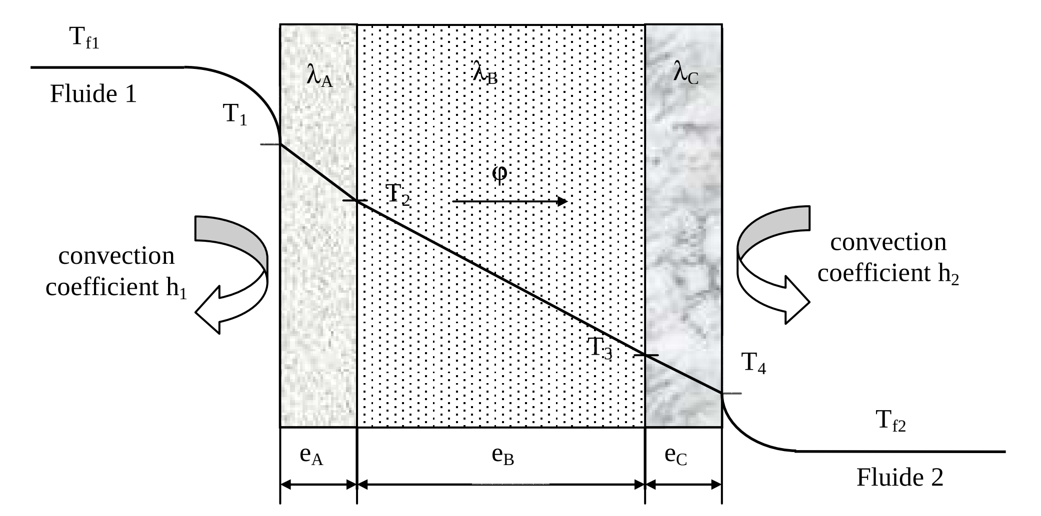


Figure 2.4 : Schématisation des flux et des températures dans un mur multicouches

On a considéré que les contacts entre les couches de différentes natures étaient parfaits et qu'il n'existait pas de discontinuité de température aux interfaces. En réalité, compte-tenu de la rugosité des surfaces, une micro-couche d'air existe entre les creux des surfaces en regard qui contribue à la création d'une résistance thermique (l'air est un isolant) appelée résistance thermique de contact. La formule précédente s'écrit alors :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\dfrac{1}{h_1 S} + \dfrac{e_A}{\lambda_A S} + R_{AB} + \dfrac{e_B}{\lambda_B S} + R_{BC} + \dfrac{e_C}{\lambda_C S} + \dfrac{1}{h_2 S}} \qquad (2.9)$$

Le schéma électrique équivalent est représenté sur la figure 2.5.

φ

T_{f1} — $\frac{1}{h_1 S}$ — $\frac{e_A}{\lambda_A S}$ — R_{AB} — $\frac{e_B}{\lambda_B S}$ — R_{BC} — $\frac{e_C}{\lambda_C S}$ — $\frac{1}{h_2 S}$ — T_{f2}

Figure 2.5 : Schéma électrique équivalent d' un mur multicouches

Remarques :

- Une résistance thermique ne peut être définie en l'absence de sources que sur un tube de flux.
- Cette résistance thermique de contact est négligée si le mur comporte une paroi isolante ou si les parois sont jointes par soudure.

2.2.3 Mur composite

C'est le cas le plus couramment rencontré dans la réalité où les parois ne sont pas homogènes. Considérons à titre d'exemple un mur de largeur L constitué d'agglomérés creux (figure 2.6).

En supposant le transfert unidirectionnel et en tenant compte des axes de symétrie, on peut se ramener au calcul du flux à travers l'élément isolé sur la droite de la figure et calculer la résistance thermique R équivalente d'une portion de mur de largeur L et de hauteur $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ en utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle par la relation :

$$R = R_1 + R_2 + \frac{1}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5}} + R_6 + R_7$$

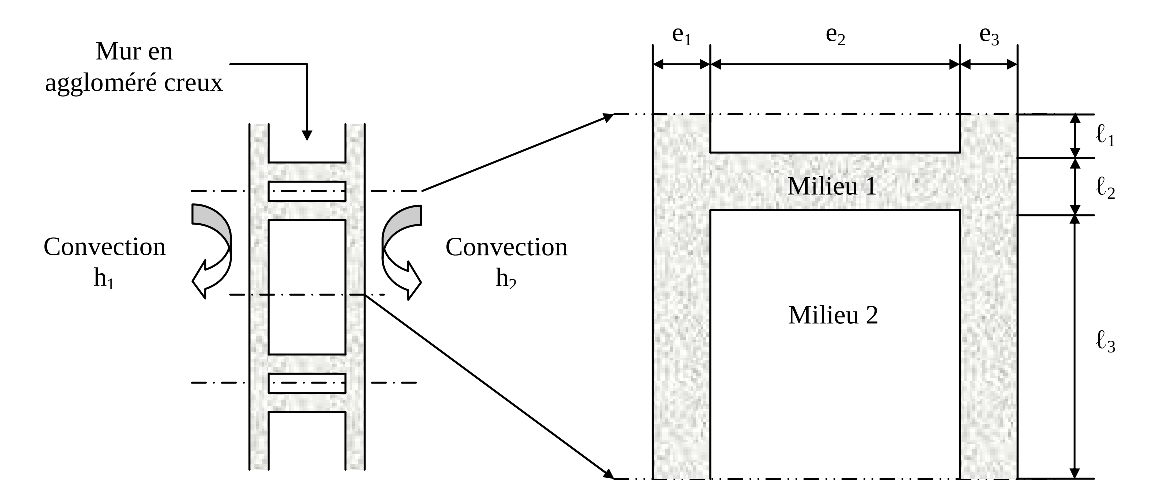


Figure 2.6 : Schématisation d'un mur composite

Avec :

$$R_1 = \frac{1}{h_1 \, \ell \, L} \; ; \; R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 \, \ell \, L} \; ; R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 \, \ell_1 \, L} \; ; R_4 = \frac{e_2}{\lambda_1 \, \ell_2 \, L} \; ; \quad R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 \, \ell_3 \, L} \; ; R_6 = \frac{e_3}{\lambda_1 \, \ell \, L} \; ; R_7 = \frac{1}{h_2 \, \ell \, L}$$

ce qui peut être schématisé par le schéma électrique équivalent représenté sur la figure 2.7.

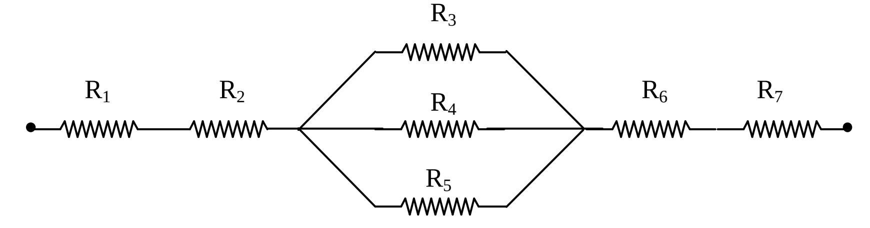


Figure 2.7 : Schéma électrique équivalent du mur composite

2.2.4 Cylindre creux long (tube)

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ, de rayon intérieur r_1, de rayon extérieur r_2, de longueur L, les températures des faces internes et externes étant respectivement T_1 et T_2 (cf. figure 2.8). On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

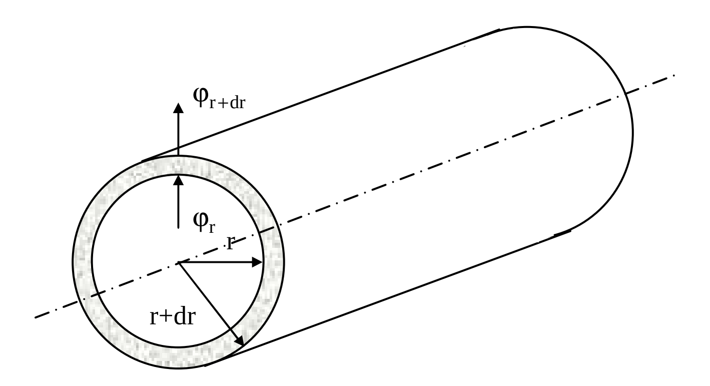


Figure 2.8 : Schéma des transferts dans un cylindre creux

Effectuons le bilan thermique du système constitué par la partie de cylindre comprise entre les rayons r et r + dr :

$$\varphi_r = \varphi_{r+dr}$$

Avec $\varphi_r = -\lambda\, 2\pi r L \left(\frac{dT}{dr}\right)_r$ et $\varphi_{r+dr} = -\lambda\, 2\pi (r+dr)\, L \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$

Soit $-\lambda\, 2\pi\, r L \left(\frac{dT}{dr}\right)_r = -\lambda\, 2\pi\, (r+dr)\, L \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$ d'où $r\,\frac{dT}{dr} = C$

Avec les conditions aux limites : $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$

D'où :

$$\frac{T(r)-T_1}{T_2-T_1} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \qquad (2.10)$$

Et par application de la relation $\varphi = -\lambda L\, 2\pi r\, \frac{dT}{dr}$, on obtient :

$$\varphi = \frac{2\pi\, \lambda\, L\, (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \qquad (2.11)$$

Cette relation peut aussi être mise sous la forme : $\varphi = \frac{T_1 - T_2}{R_{12}}$ avec $R_{12} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\, \lambda\, L}$ et être représentée par le schéma électrique équivalent de la figure 2.9.

φ

T_1 —/\/\/\/\— T_2

$$R_{12} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\, \lambda\, L}$$

Figure 2.9 : Schéma électrique équivalent d'un cylindre creux

2.2.5 Cylindre creux multicouches

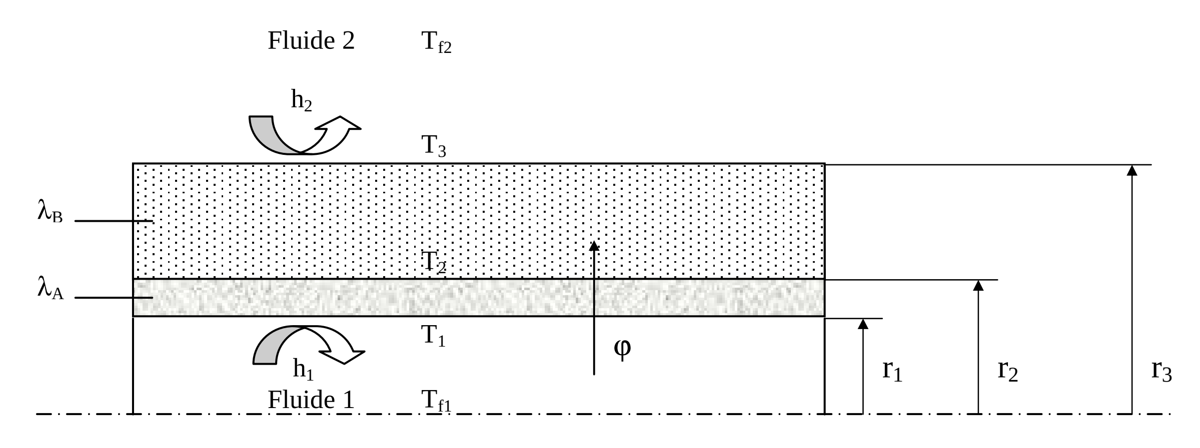


Figure 2.10 : Schéma des transferts dans un cylindre creux multicouches

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où l'on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les faces interne et externe du cylindre ; h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les fluides et les faces internes et externes (cf. figure 2.10)

En régime permanent, le flux de chaleur φ se conserve lors de la traversée des différentes couches et s'écrit :

$$\varphi = h_1\, 2\pi\, r_1\, L\left(T_{f1} - T_1\right) = \frac{2\pi\, \lambda_A\, L\left(T_1 - T_2\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi\, \lambda_B\, L\left(T_2 - T_3\right)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} = h_2\;\; 2\pi\; r_3\, L\left(T_3 - T_{f2}\right)$$

D'où :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\dfrac{1}{h_1\, 2\pi\, r_1\, L} + \dfrac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\, \lambda_A\, L} + \dfrac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\, \lambda_B\, L} + \dfrac{1}{h_2\, 2\pi\, r_3\, L}} \qquad (2.12)$$

ce qui peut être représenté par le schéma électrique équivalent de la figure 2.11.

φ

T_{f1} — $\dfrac{1}{h_1\, 2\pi\, r_1\, L}$ — $\dfrac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\, \lambda_A\, L}$ — $\dfrac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\, \lambda_B\, L}$ — $\dfrac{1}{h_2\, 2\pi\, r_2\, L}$ — T_{f2}

Figure 2.11 : Schéma électrique équivalent d'un cylindre creux multicouches

2.2.6 Prise en compte des transferts radiatifs

Dans les exemples traités précédemment, le transfert de chaleur entre une surface à température T et le milieu environnant a été considéré comme purement convectif. Dans le cas où le fluide en contact avec la surface est un gaz et où la convection est naturelle, le transfert de chaleur par rayonnement avec les parois (à la température moyenne Tr) entourant la surface peut devenir du même ordre de grandeur que le transfert de chaleur par convection avec le gaz (à la température T_f) au contact de la surface et ne peut plus être négligé. Il s'écrit d'après la relation (1.9) :

$$\varphi_r = \sigma\, \varepsilon\, S\left(T^4 - T_r{}^4\right)$$

que l'on peut mettre sous la forme : $\varphi_r = h_r\; S\left(T - T_r\right)$

h_r étant appelé le coefficient de transfert radiatif : $h_r = \sigma\, \varepsilon\; \left(T^2 + T_r{}^2\right)\left(T + T_r\right)$

Les deux transferts, convectif et radiatif, s'effectuent en parallèle et le schéma électrique correspondant est représenté sur la figure 2.12.

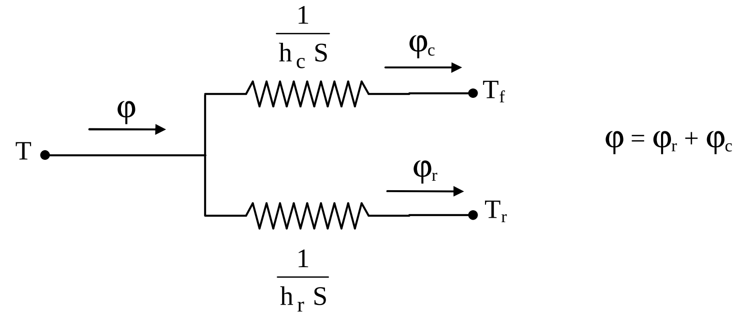


Figure 2.12 : Schéma électrique équivalent avec transferts convectif et radiatif simultanés

Le coefficient de transfert radiatif h_r varie peu pour des variations limitées des températures T et T_r et peut pour un premier calcul simplifié être considéré comme constant. Par exemple avec ε = 0,9, T = 60°C et T_r = 20°C, la valeur exacte est h_r = 6,28 $W.K^{-1}.m^{-2}$. La valeur approchée calculée pour la température moyenne T_{moyen} = 40°C est h_r =5,96 $W.K^{-1}.m^{-2}$. Si T_1 devient égal à 50°C, la valeur de h_r devient égale à 5,98 $W.K^{-1}.m^{-2}$, soit une variation de seulement 5 %.

2.3 Transfert multidirectionnel

Dans le cas où la diffusion de la chaleur ne s'effectue pas selon une direction unique, deux méthodes de résolution peuvent être appliquées :

2.3.1 Méthode du coefficient de forme

Dans les systèmes bidimensionnels ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites T_1 et T_2, on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{\varphi = \lambda\, F\left(T_1 - T_2\right)} \qquad (2.13)$$

Avec :	λ	Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces S_1 et S_2	($W\ m^{-1}\ °C^{-1}$)
	T_1	Température de la surface S_1	(°C)
	T_2	Température de la surface S_2	(°C)
	F	Coefficient de forme	(m)

Le coefficient de forme F ne dépend que de la forme, des dimensions et de la position relative des deux surfaces S_1 et S_2. Les valeurs de F pour les configurations les plus courantes sont présentées en annexe A.2.1.

Cas particulier : Enceinte tridimensionnelle (four, chambre froide, pièce climatisée,...)

Méthode : on découpe l'enceinte en différents éléments et on calcule le flux traversant chacun d'eux selon la représentation de la figure 2.13.

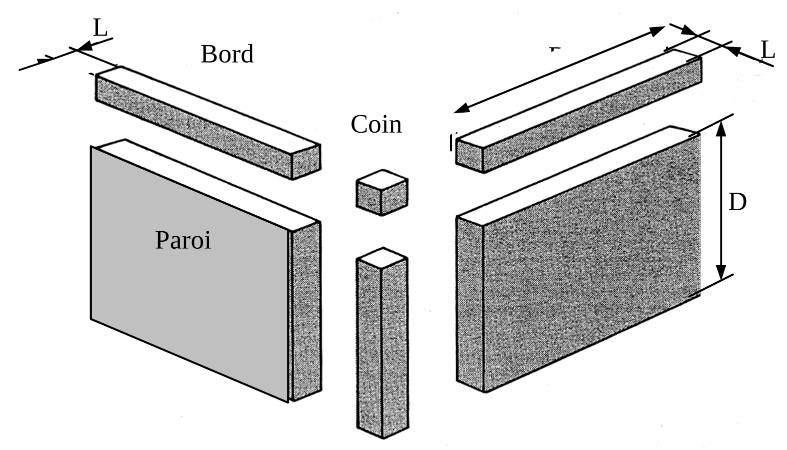


Figure 2.13 : Méthode de découpe d'une enceinte tridimensionnelle

Si les dimensions longitudinales sont grandes devant l'épaisseur e des parois (supposée constante), les coefficients de forme des différents éléments ont pour valeur :

$F_{paroi\ i} = S_i/L_i$

$F_{bord\ i} = 0,54\ D_i$

$F_{coin\ i} = 0,15\ L_i$

Avec :	S_i :	Aire de la paroi i
	D_i :	Longueur de la paroi ou du bord i
	L_i :	Epaisseur des parois

Le flux de chaleur traversant l'enceinte s'écrit alors :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \, F_{paroi_i} \, \Delta T_i + \sum_{i=1}^{12} \lambda_i \, F_{bord_i} \, \Delta T_i + \sum_{i=1}^{8} \lambda_i \, F_{coin_i} \, \Delta T_i$$

Avec : λ_i : Conductivité thermique (équivalente si paroi multicouche)) de la paroi i (W m^{-1} $°C^{-1}$)
ΔT_i : Différence de température entre les faces intérieure et extérieure de la paroi i (°C)

2.3.2 Méthodes numériques

Expression de l'équation de Laplace en différences finies

Dans le cas où la méthode du coefficient de forme ne peut pas s'appliquer (surfaces non isothermes par exemple), il faut résoudre l'équation de Laplace numériquement. On utilise par exemple une méthode aux différences finies en discrétisant le domaine considéré (espace ou plan). On traitera dans ce qui suit le cas bidimensionnel, le cas tridimensionnel s'en déduit en rajoutant simplement une dimension d'espace.

On considère un milieu plan sur lequel on a appliqué un maillage de pas Δx et Δy tel que représenté sur la figure 2.14.

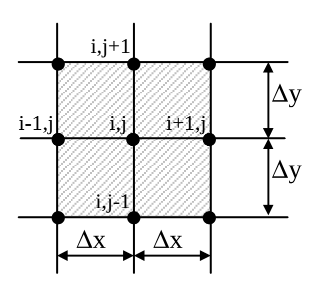


Figure 2.14 : Représentation du maillage de la surface

Les dérivées partielles de la température T peuvent s'exprimer selon les formules suivantes :

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \approx \frac{T(i+1, j) - T(i, j)}{\Delta x} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x}\left(i-\frac{1}{2}, j\right) \approx \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \approx \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta y} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y}\left(i, j-\frac{1}{2}\right) \approx \frac{T(i, j) - T(i, j-1)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(i, j) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial x}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - \frac{\partial T}{\partial x}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} = \frac{T(i+1, j) + T(i-1, j) - 2\,T(i, j)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(i, j) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial y}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{\partial T}{\partial y}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} = \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1) - 2\,T(i, j)}{(\Delta y)^2}$$

L'équation de Laplace en bidimensionnel : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ s'écrit alors :

$$\frac{T(i+1, j) + T(i-1, j) - 2\,T(i, j)}{(\Delta x)^2} + \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1) - 2\,T(i, j)}{(\Delta y)^2} = 0$$

Et si l'on choisit $\Delta x = \Delta y$, on obtient : $T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i+1, j) + T(i, j-1) + T(i, j+1)}{4}$

Expression des conditions aux limites en différences finies

Les conditions aux limites imposant sur un bord une température de surface s'expriment simplement en fixant la valeur de la température T(i,j) à la valeur imposée pour tout couple (i,j) représentant un point de ce bord.

Les conditions aux limites avec transfert convectif ou flux imposé s'expriment de la manière suivante :

Bord rectiligne

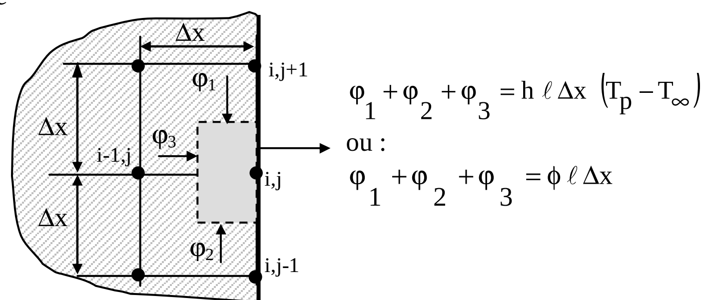


Figure 2.15 : Représentation des flux élémentaires sur un bord rectiligne

Un bilan thermique appliqué à la surface grise (rectangle de côtés Δx/2 et Δx, cf. figure 2.15)) conduit au résultat suivant compte tenu des formules établies précédemment :

Densité de flux ϕ (en $W.m^{-2}$) imposée : $T(i,j) = \dfrac{T(i-1,j)}{2} + \dfrac{T(i,j+1) + T(i,j-1)}{4} - \dfrac{\phi\,\Delta x}{2\lambda}$

Coefficient de convection imposé : $T(i,j) = \dfrac{T(i-1,j) + \dfrac{T(i,j+1) + T(i,j-1)}{2} + Bi\,T_\infty}{2 + Bi}$

Où $Bi = \dfrac{h\,\Delta x}{\lambda}$ est le nombre de Biot

Coin extérieur

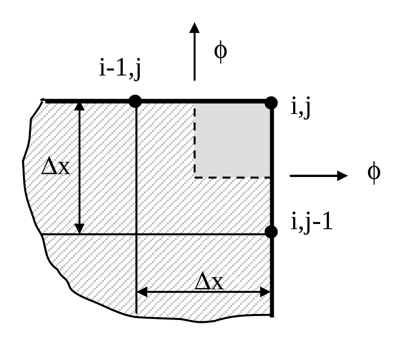


Figure 2.16 : Représentation des flux élémentaires sur un coin extérieur

Un bilan thermique appliqué à la surface grise (cf. figure 2.16) conduit au résultat suivant compte-tenu des formules établies précédemment :

Densité de flux ϕ (en $W.m^{-2}$) imposée : $T(i,j) = \dfrac{T(i-1,j) + T(i,j-1)}{4} - \dfrac{\phi\,\Delta x}{2\lambda}$

Coefficient de convection imposé : $T(i,j) = \dfrac{\dfrac{T(i-1,j) + T(i,j-1)}{2} + Bi\,T_\infty}{1 + Bi}$

Coin intérieur

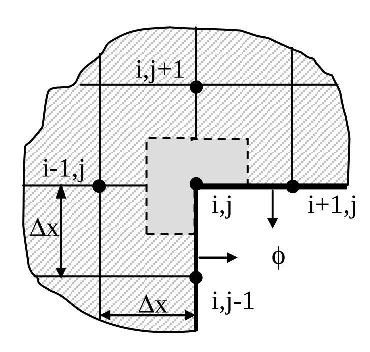


Figure 2.17 : Représentation des flux élémentaires sur un coin intérieur

Un bilan thermique appliqué à la surface grise (cf. figure 2.17) conduit au résultat suivant compte-tenu des formules établies précédemment :

Densité de flux ϕ (en $W.m^{-2}$) imposée : $$T(i,j) = \frac{T(i-1,j)+T(i,j+1)}{3} + \frac{T(i+1,j)+T(i,j-1)}{6} - \frac{\phi\,\Delta x}{3\lambda}$$

Coefficient de convection imposé : $$T(i,j) = \frac{T(i-1,j)+T(i,j+1)+\dfrac{T(i+1,j)+T(i,j-1)}{2}+Bi\,T_\infty}{3+Bi}$$

<u>Méthode de résolution numérique</u>

Soit à résoudre l'équation de Laplace sur un domaine plan (D) limité par un contour (C).

On réalise un maillage du système avec un pas Δx en général identique dans les deux directions du plan.

On affecte à chaque point du domaine (D) une valeur initiale de la température :

- Egale à la température imposée sur les points du contour où la condition limite impose une température.
- Arbitraire ailleurs mais la plus « réaliste » possible.

La résolution s'effectue par la méthode itérative de Gauss-Siedel. On effectue des itérations successives consistant à remplacer la valeur de la température en chaque nœud du maillage par la valeur calculée par l'équation aux différences finies qui lui est associée. Une itération consiste à effectuer un balayage complet de tous les noeuds, ligne après ligne et de gauche à droite pour chaque ligne par exemple. Les valeurs recalculées sont immédiatement prises en compte pour le calcul de la valeur de la température T aux points d'ordre supérieur (points situés à droite et en-dessous dans le mode de balayage proposé).

<u>Critère de convergence</u>

On peut par exemple arrêter le calcul dès que la variation la plus grande de T(i,j) au cours d'une itération reste inférieure à une valeur ε donnée.

<u>Remarques</u>

- On n'applique aucun calcul sur les points du contour où la température est imposée.
- La valeur de la température sera rangée dans un tableau T(i,j), on pourra utiliser un autre tableau L(i,j) dont les valeurs indiqueront si le point de coordonnées ($i\Delta x$, $j\Delta y$) appartient au domaine (D) et le type d'équation aux différences finies qui s'y applique.
- On peut accélérer la convergence en appliquant un coefficient de surrelaxation R ($1 < R < 2$, optimum proche de 1,7) au calcul de T(i,j) de la manière suivante (si on applique l'ordre de balayage proposé):

$$T_{n+1}(i,j) = (1-R)\,T_n(i,j) + R\;\frac{T_{n+1}(i-1,j)+T_n(i+1,j)+T_{n+1}(i,j-1)+T_n(i,j+1)}{4}$$

- On peut noter que la discrétisation décrite ici revient très exactement à simuler un milieu bidimensionnel conducteur de l'électricité par un réseau de résistances reliant chaque nœud à ses voisins.

2.4 Les ailettes

2.4.1 L'équation de la barre

Le problème de la barre encastrée schématise le problème pratique important du refroidissement d'un solide par des ailettes.

Considérons une barre de section constante (épaisseur e et largeur ℓ) encastrée entre 2 surfaces à température T_0 et baignant dans un fluide à température T_∞.

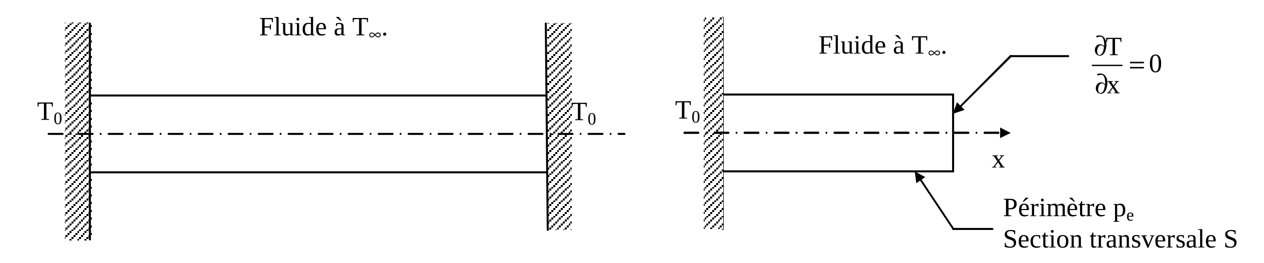


Figure 2.18 : Représentation d'une barre encastrée et schéma simplifié

La symétrie du problème montre l'existence d'un extrêmum de la température au milieu de la barre ce qui permet de simplifier la géométrie et de ne considérer qu'une demi-barre avec condition de flux nul à l'extrémité située en contact avec le milieu à T_∞ (cf figure 2.18).

La barre est supposée de section suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas de variation de température dans une même section droite à une distance x de l'encastrement dans la paroi à T_0.

Effectuons un bilan d'énergie sur le système constitué par la portion de barre comprise entre les abscisses x et x+dx (nous retenons l'hypothèse du régime permanent et nous négligeons le rayonnement) :

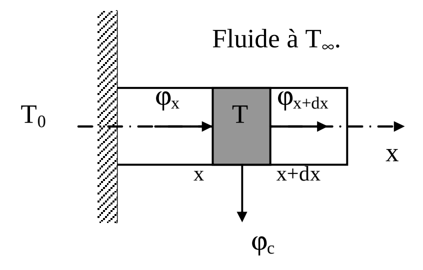


Figure 2.19 : Représentation des flux élémentaires sur une barre encastrée

Avec :

φ_x	Flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse x	$\varphi_x = -\left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_x$
φ_{x+dx}	Flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse x+dx	$\varphi_x = -\left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}$
φ_c	Flux de chaleur transmis par convection à la périphérie de la barre entre x et x+dx	$\varphi = h\, p_e\, dx\, [T(x) - T_\infty]$

Le bilan d'énergie s'écrit : $\varphi_x = \varphi_{x+dx} + \varphi_c$

Soit : $$\left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_x = h\, p_e\, dx\, [T(x) - T_\infty]$$

Si λ et S sont indépendants de l'abscisse x, nous obtenons :

$$\lambda\, S \frac{\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x}}{dx} = h\, p_e \left[T(x) - T_\infty\right]$$

Donc T(x) est solution de l'équation différentielle suivante appelée équation de la barre :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h\, p_e}{\lambda\, S}\left(T - T_\infty\right) = 0 \qquad (2.14)$$

2.4.2 Flux extrait par une ailette

Une ailette est un milieu bon conducteur de la chaleur dont une dimension est grande devant les autres, exemple : barre d'épaisseur e et de longueur L, avec e<< L. Elles sont utilisées à chaque fois que des densités de flux élevées sont à transmettre dans un encombrement réduit : refroidissement de composants électroniques, refroidissement d'un moteur par air,…

On a établi l'équation différentielle vérifiée par la température T(x) d'une ailette encastrée dans un mur à la température T_0 et baignant dans un fluide à la température T_∞ :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h\, p_e}{\lambda\, S}\left(T - T_\infty\right) = 0$$

En posant : $\omega^2 = \frac{h\, p_e}{\lambda\, S}$ et $\theta = T - T_\infty$ elle peut encore s'écrire : $\frac{d^2\theta}{dx^2} - \omega^2\ \theta = 0$

Si la section S est constante, c'est une équation différentielle du 2nd ordre à coefficients constants dont la solution générale est de la forme :

$$\theta = A \exp\left(\omega x\right) + B \exp\left(-\omega x\right) \qquad \text{ou} \qquad \theta = A_1\ \text{ch}\left(\omega x\right) + B_1\ \text{sh}\left(\omega x\right)$$

2.4.2.1 Ailette rectangulaire longue de section constante

Dans le cas de l'ailette longue, on émet l'hypothèse que : $T(x=L) = T_\infty$, où L est la longueur de l'ailette.

Les conditions aux limites s'écrivent alors : en x = 0 : $\theta(0) = T_0 - T_\infty$ *(a)*
en x = L : $\theta(L) = 0$ *(b)*

(b) $\Rightarrow$ A = 0
(a) $\Rightarrow$ $B = T_0 - T_\infty$

D'où :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp(-\omega x) \qquad (2.15)$$

Le flux dissipé sur toute la surface de l'ailette peut être calculé par intégration du flux de convection local :

$$\varphi_p = \int_0^L h\, p_e \left[T(x) - T_\infty\right] dx$$

Ou plus facilement en remarquant que dans le cas du régime permanent, c'est le même que celui transmis par conduction à la base de l'ailette soit : $\varphi_p = \varphi_{c(x=0)}$

$$\varphi_c = -\lambda\, S \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = -\lambda\, S \left(T_0 - T_\infty\right)\left(-\omega\right) \exp\left(-\omega x\right) \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{h\, p_e}{\lambda\, S}}$$

D'où :

$$\varphi_p = \sqrt{h\,p_e\,\lambda S}\;(T_0 - T_\infty) \tag{2.16}$$

2.4.2.2 Ailette rectangulaire de section constante isolée à l'extrémité

La solution générale obtenue est identique au cas précédent, ce sont les conditions aux limites qui diffèrent :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 \\ -\lambda S \left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=L} = 0 \quad \text{(conservation du flux de chaleur en x=L)} \end{cases}$$

La solution s'écrit :

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_0-T_\infty} = \cosh(\omega\,x) - \tanh(\omega\,L)\sinh(\omega\,x) = \frac{\cosh[\omega\,(L-x)]}{\cosh(\omega L)} \tag{2.17}$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\varphi_p = \omega\lambda S\tanh(\omega L)(T_0 - T_\infty) \tag{2.18}$$

<u>Remarque</u> : si l'épaisseur e de l'ailette est faible devant sa largeur ℓ, $\omega \approx \sqrt{\dfrac{2\,h}{\lambda\,e}}$

2.4.2.3 Ailette rectangulaire de section constante avec transfert de chaleur à l'extrémité

La solution générale obtenue est identique au cas 2.3.2.1, ce sont les conditions aux limites qui diffèrent :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 \\ -\lambda S \left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=L} = h\,S\,[T(x=L) - T_\infty] \quad \text{(conservation du flux de chaleur en x=L)} \end{cases}$$

La solution s'écrit :

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_0-T_\infty} = \frac{\cosh[\omega(L-x)] + \dfrac{h}{\omega\lambda}\sinh[\omega(L-x)]}{\cosh(\omega L) + \dfrac{h}{\omega\lambda}\sinh(\omega L)} \tag{2.19}$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\varphi_p = \omega\lambda S(T_0 - T_\infty)\frac{\tanh(\omega L) + \dfrac{h}{\omega\lambda}}{1 + \dfrac{h}{\omega\lambda}\tanh(\omega L)} \tag{2.20}$$

<u>Remarque</u> :

Dans le cas où l'épaisseur e de l'ailette est faible devant sa largeur ℓ (ce qui est en général vérifié) : $\dfrac{h}{\omega\,\lambda} = \sqrt{\dfrac{h\,e}{\lambda}}$. Les ailettes étant en général réalisées en matériau bon conducteur (λ élevé) et ayant une épaisseur

e faible, l'hypothèse $\sqrt{\dfrac{h\,e}{\lambda}}$ <<1 est le plus souvent vérifiée, les équations (2.19) et (2.20) se ramènent alors aux expressions plus simples des équations (2.17) et (2.18) qui sont celles utilisées dans la pratique (cf. annexe A.2.2).

2.4.2.4 Ailette circulaire de section rectangulaire

Ces d'ailettes destinées à améliorer le transfert de chaleur entre la paroi externe d'un tube et le milieu ambiant (exemple : tubes de radiateur d'automobile) peuvent être schématisées de la manière suivante :

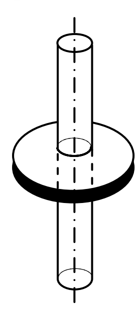


Figure 2.20 : Schéma d'une ailette circulaire

Effectuons un bilan thermique sur l'élément d'ailette compris entre les rayons r et r+dr :

Le bilan d'énergie s'écrit (cf. figure 2.21): $\varphi_r = \varphi_{r+dr} + \varphi_c$

Avec :

φ_r	Flux de chaleur transmis par conduction au rayon r	$\varphi_r = -\lambda\, 2\,\pi\, r\, e \left(\dfrac{dT}{dr}\right)_r$
φ_{r+dr}	Flux de chaleur transmis par conduction au rayon r + dr	$\varphi_{r+dr} = -\lambda\, 2\,\pi\,(r+dr)\, e \left(\dfrac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$
φ_c	Flux de chaleur transmis par convection sur la surface de l'ailette entre r et r + dr	$\varphi_c = 2\left\{ h\, 2\,\pi\, r\, dr\left[T(r) - T_\infty\right]\right\}$

Si λ est indépendant du rayon r, nous obtenons :

$$\frac{1}{r}\;\frac{(r+dr)\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{r+dr} - r\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_r}{dr} = \frac{2\,h}{\lambda\, e}\;\left[T(x) - T_\infty\right]$$

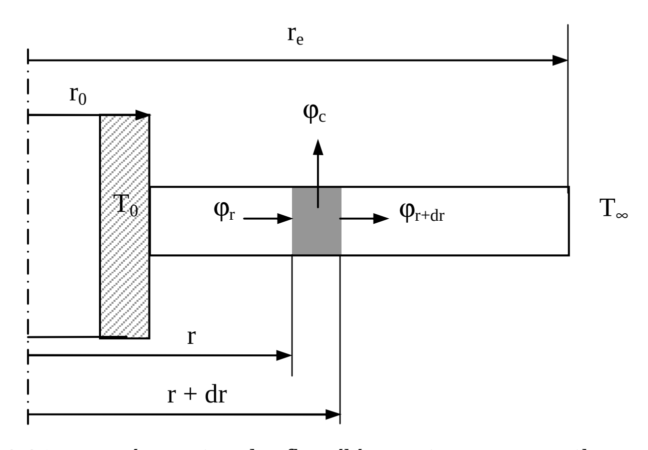


Figure 2.21 : Représentation des flux élémentaires sur une ailette circulaire

Soit encore : $\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} - \frac{2\,h}{\lambda\,e}\theta$ où $\theta = T - T_\infty$

C'est une équation de Bessel (cf. annexe A.2.3) dont la solution s'écrit sous la forme :

$$\theta = C_1\, I_0(\omega r) + C_2\, K_0(\omega r) \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{2\,h}{\lambda\,e}}$$

C_1 et C_2 étant déterminés par les conditions aux limites :

En $r = r_0$: $\theta = T_0 - T_\infty$

En $r = r_e$: $h\,\theta\,(r_e) = -\lambda \frac{d\theta}{dr}(r_e)$ (cas le plus général : transfert de chaleur à l'extrémité)

On en déduit les valeurs de C_1 et de C_2 :

$$C_1 = \frac{K_1(\omega r_e) - \frac{h}{\lambda\omega} K_0(\omega r_e)}{I_1(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_e) + \frac{h}{\lambda\omega}\left[I_0(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_0(\omega r_e)\right]}$$

$$C_2 = \frac{1 - C_1\, I_0(\omega r_0)}{K_0(\omega r_0)}$$

Dans le cas où l'on peut faire l'hypothèse du flux nul à l'extrémité : $\sqrt{\frac{h\,e}{\lambda}} \ll 1$, on aboutit à l'expression simplifiée suivante :

$$\frac{T(r) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{K_1(\omega r_e) I_0(\omega r) + I_1(\omega r_e) K_0(\omega r)}{I_1(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_e)} \tag{2.21}$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a alors pour expression :

$$\varphi_p = \lambda\, 2\pi\, r_0\, e\, \omega\, (T_0 - T_\infty) \frac{I_1(\omega r_e)\; K_1(\omega r_0) - K_1(\omega r_e) I_1(\omega r_0)}{I_1(\omega r_e)\; K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_e)} \tag{2.22}$$

2.4.3 Efficacité d'une ailette

Elle définit les performances d'une ailette en comparant le flux dissipé à celui qui serait dissipé dans une ailette de mêmes dimensions mais dont la température serait uniforme et égale à celle de la base (conductivité thermique $\lambda \to \infty$, pas de résistance thermique de conduction donc pas de chute de température dans l'ailette).

Le flux échangé par cette ailette idéale serait :

$\varphi_{max} = h\, p_e\, L\, (T_0 - T_\infty)$ pour une ailette rectangulaire de périmètre p_e et de longueur L

$\varphi_{max} = 2\, h\, \pi \left(r_e^{\,2} - r_0^{\,2}\right)(T_0 - T_\infty)$ pour une ailette circulaire de rayon de base r_0 et de rayon externe r_e.

L'efficacité de l'ailette s'écrit donc : $\eta = \frac{\varphi_p}{\varphi_{max}}$

Nous en déduisons les relations suivantes :

Ailette rectangulaire longue ($L \to \infty$) :

$$\eta = \frac{1}{\omega L} \tag{2.23}$$

Ailette rectangulaire isolée à l'extrémité : $$\eta = \frac{\tanh(\omega L)}{\omega L}$$ (2.24)

Ailette rectangulaire avec transfert de chaleur à l'extrémité :

$$\eta = \frac{\tanh(\omega L) + \dfrac{h}{\omega \lambda}}{\omega L + \dfrac{h L}{\lambda} \tanh(\omega L)}$$ (2.25)

Avec : $\omega = \sqrt{\dfrac{h p_e}{\lambda S}}$

Ailette circulaire de section rectangulaire :

$$\eta = \sqrt{\frac{2\lambda}{h r_0} \frac{e}{r_0}} \; \frac{1}{\dfrac{r_e^2}{r_0^2} - 1} \; \frac{I_1(\omega r_e)\, K_1(\omega r_0) - K_1(\omega r_e)\, I_1(\omega r_0)}{I_1(\omega r_e)\, K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0)\, K_1(\omega r_e)}$$ (2.26)

Avec : $\omega = \sqrt{\dfrac{2\,h}{\lambda\, e}}$

Dans le cas de géométries plus complexes (ailettes à section variable, ailettes aiguilles…), il existe des formules ou des abaques (cf. annexe A.2.2) permettant de déterminer l'efficacité des ailettes et ensuite le flux de chaleur φ_p extrait par l'ailette grâce à la relation : $\varphi_p = \eta\, \varphi_{max}$.

Remarque : Résistance thermique d'une ailette

Des relations $\eta = \dfrac{\varphi_p}{\varphi_{max}}$ et $\varphi_{max} = h\, S_e\,(T_0 - T_\infty)$ on déduit : $\varphi_p = \dfrac{T_0 - T_\infty}{\dfrac{1}{\eta\, h\, S_e}}$

Où S_e est la surface d'échange entre l'ailette et le fluide.

La résistance thermique globale entre la base de l'ailette à la température T_0 et le fluide à la température T_∞ s'écrit donc :

$$R_{ailette} = \frac{1}{\eta\, h\, S_e}$$ (2.27)

2.4.4 Choix des ailettes

Les ailettes sont utilisées lorsqu'il faut extraire une densité de flux importante dans un encombrement réduit, exemples : radiateur d'automobile, carter de moteur refroidi par air, évaporateur de climatiseur,…

D'une façon générale, l'usage des ailettes est :
- peu utile pour les liquides car h est grand,
- utile dans le cas des gaz car h est faible.

Des ailettes étroites et rapprochées sont meilleures que des ailettes plus grandes et espacées mais on est limité par les pertes de charges (elles augmentent si l'on diminue trop l'écartement des ailettes). L'ailette est d'autant plus performante que sa conductivité thermique λ est élevée. Le choix des ailettes est alors un compromis entre le coût, l'encombrement, les pertes de charge et le transfert de chaleur.

3 TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME VARIABLE

3.1 *Conduction unidirectionnelle en régime variable sans changement d'état*

3.1.1 Milieu à température uniforme

On va étudier le transfert de chaleur vers un milieu à température uniforme, ce qui est a priori contradictoire car il est nécessaire qu'il y ait un gradient thermique pour qu'il se produise un transfert de chaleur. Cette approximation du milieu à température uniforme peut néanmoins être justifiée dans certains cas que l'on va préciser. Soit par exemple la trempe d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température T_i dans un bain à température T_0 maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est uniforme, ce qui sera d'autant plus vrai que sa dimension est petite et sa conductivité thermique élevée, on peut écrire le bilan thermique de cette bille entre deux instants t et t + dt :

$$-\,h\,S\left(T - T_0\right) = \rho\,c\,V\frac{dT}{dt} \quad \text{soit :} \quad \frac{dT}{T - T_0} = -\frac{h\,S}{\rho\,c\,V}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{h\,S}{\rho\,c\,V}\,t\right)} \qquad (3.1)$$

On remarque que le groupement $\frac{\rho\,c\,V}{h\,S}$ est homogène à un temps, on l'appellera τ la constante de temps du système :

$$\boxed{\tau = \frac{\rho\,c\,V}{h\,S}} \qquad (3.2)$$

Cette grandeur est fondamentale dans la mesure où elle donne l'ordre de grandeur de temps du phénomène physique, on a en effet : $\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec :

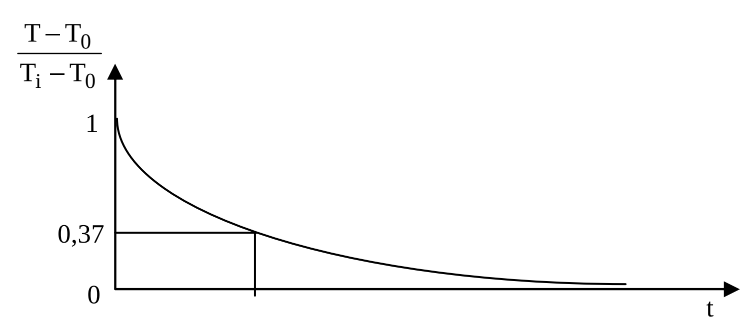


Figure 3.1 : Evolution de la température d'un milieu à température uniforme

Il est toujours intéressant en physique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, deux nombres adimensionnels sont particulièrement important en régime variable :

- Le nombre de Biot : $\mathrm{Bi} = \text{nombre de Biot} = \frac{\text{Résisance thermique interne}}{\text{Résisance thermique externe}} = \frac{\frac{\ell}{\lambda S}}{\frac{1}{hS}}$, ℓ est la dimension caractéristique du milieu, $\ell = r$ pour une sphère.

  Soit :

$$\boxed{\mathrm{Bi} = \frac{h\,\ell}{\lambda}} \qquad (3.3)$$

L'hypothèse d'uniformité de la température est justifiée lorsque $Bi < 0,1$.

- Le nombre de Fourier : $$Fo = \frac{a\,t}{\ell^2} \quad (3.4)$$

Le nombre de Fourier caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable. La définition de ces deux nombres permet d'écrire l'expression de la température de la bille sous la forme :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-Bi\ Fo\right) \quad (3.5)$$

La connaissance du produit des nombres de Biot et de Fourier permet de déterminer l'évolution de la température de la sphère. On considère généralement qu'un système tel que $Bi < 0,1$ peut être considéré comme étant à température uniforme, le critère $Bi < 0,1$ est appelé le critère d'« accommodation thermique ».

3.1.2 Milieu semi-infini

Un milieu semi-infini est une paroi d'épaisseur suffisamment grande pour que la perturbation appliquée sur une face ne soit pas ressentie par l'autre face. Un tel système représente l'évolution d'un mur d'épaisseur finie pendant un temps suffisamment court pour la perturbation créée sur une face n'ait pas atteint l'autre face (vrai tout le temps que la température de l'autre face n'a pas varié).

3.1.2.1 Température constante imposée en surface

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Le milieu semi-infini est initialement à la température uniforme T_i. On impose brutalement la température T_0 sur sa surface, cette condition limite est appelée condition de Dirichlet :

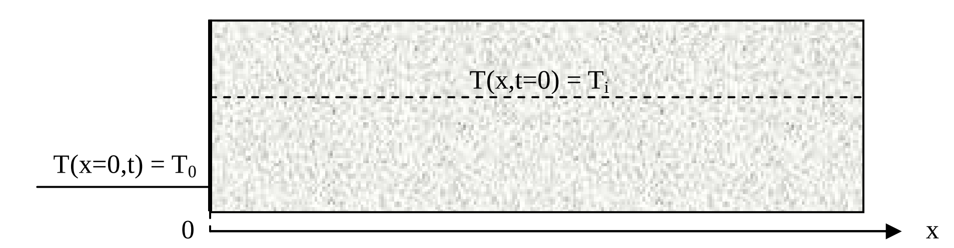


Figure 3.2 : Schéma du milieu semi-infini avec température de surface imposée

L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ T(x=0, t) = T_0 & (c) \\ \lim\limits_{x \to \infty} T(x, t) = T_i & (d) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\overline{T} = T - T_i$

D'où : $\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$

L'équation *(a)* peut alors s'écrire : $\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent : $\begin{cases} \overline{T}(x,0) = 0 & (b) \\ \overline{T}(x=0,t) = T_0 - T_i & (c) \\ \lim\limits_{x \to \infty} \overline{T}(x,t) = 0 & (d) \end{cases}$

La transformée de Laplace de $\overline{T}(x,t)$ par rapport au temps s'écrit (cf. annexe A.3.1 sur les transformations intégrales) : $\theta(x,p) = L\{\overline{T}(t)\} = \int_0^\infty \exp(-p\,t)\,\overline{T}(x,t)\,dt$

La transformée de Laplace de l'équation *(a)* conduit à : $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - \dfrac{1}{a}\left[p\,\theta - \overline{T}(x,0)\right] = 0$ avec $\overline{T}(x,0) = 0$

Cette équation est donc de la forme : $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - q^2\,\theta = 0$ avec $q^2 = \dfrac{p}{a}$

D'où : $\theta(x,p) = A\,e^{-qx} + B\,e^{+qx}$, la température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc B = 0, nous en déduisons que $\theta(x,p) = A\,e^{-qx}$

La transformée de Laplace de l'équation *(c)* conduit à : $\theta(0,p) = \dfrac{T_0 - T_i}{p}$ d'où $A = \dfrac{T_0 - T_i}{p}$ et $\theta = (T_0 - T_i)\dfrac{e^{-qx}}{p}$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.3.2 conduit au résultat suivant :

$$\frac{T(x,t) - T_0}{T_i - T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\,t}}\right) \qquad (3.6)$$

Avec : $\operatorname{erf}(u) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \exp(-t^2)\,dt$, la fonction erf est appelée la fonction erreur (cf. valeurs en annexe A.3.4)

3.1.2.2 Flux imposé

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Considérons la même configuration mais en imposant brutalement une densité de flux de chaleur à la surface du milieu semi-infini, cette condition limite est appelée condition de Neumann.

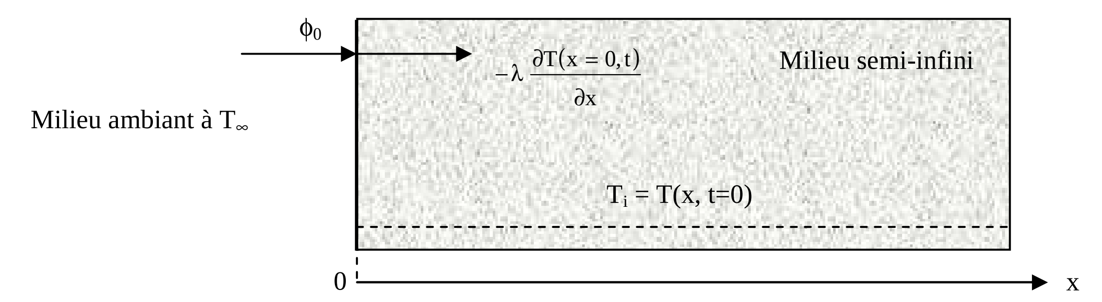


Figure 3.3 : Schéma du milieu semi-infini avec flux surfacique imposé

L'équation de la chaleur s'écrit : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

Avec les conditions aux limites : $\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ T(\infty, t) = T_i & (c) \\ -\lambda \dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \phi_0 & (d) \end{cases}$

Cette dernière condition traduit la conservation du flux de chaleur au niveau de la surface du milieu semi-infini.

On effectue le changement de variable suivant : $\overline{T} = T - T_i$

D'où : $\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \dfrac{\partial T}{\partial t}$

L'équation *(a)* peut alors s'écrire : $\dfrac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent
$$\begin{cases} \overline{T}(x,0) = 0 & (b) \\ \overline{T}(\infty,t) = 0 & (c) \\ -\lambda \dfrac{\partial \overline{T}(0,t)}{\partial x} = \phi_0 & (d) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'équation *(a)* conduit à : $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - \dfrac{1}{a}\left[p\,\theta - \overline{T}(x,0)\right] = 0$ avec $\overline{T}(x,0) = 0$

D'où : $\theta(x,p) = A\,e^{-qx} + B\,e^{+qx}$, la température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc B = 0, et nous en déduisons que $\theta(x,p) = A\,e^{-qx}$

La transformée de Laplace de l'équation *(d)* s'écrit : $\dfrac{\phi_0}{p} = -\lambda \dfrac{d\theta}{dx}(x=0)$

D'où : $A = \dfrac{\phi_0}{\lambda\, p\, q}$ et $\theta(x,p) = \dfrac{\phi_0}{\lambda}\dfrac{e^{-qx}}{p\,q}$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.3.2 conduit au résultat suivant :

$$\overline{T}(x,t) = T(x,t) - T_i = \frac{2\,\phi_0}{\lambda}\sqrt{a\,t}\;\mathrm{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\,t}}\right) \qquad (3.7)$$

Avec : $\mathrm{ierfc}(u) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-u^2\right) - u\left[1 - \mathrm{erf}(u)\right]$, cette fonction est tabulée en annexe A. 3.4.

3.1.2.3 Coefficient de transfert imposé

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

On considère le cas où le coefficient de transfert de chaleur par convection h entre le milieu semi-infini et le milieu ambiant est imposé, cette condition limite est appelée condition de Newton :

L'équation de la chaleur s'écrit : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

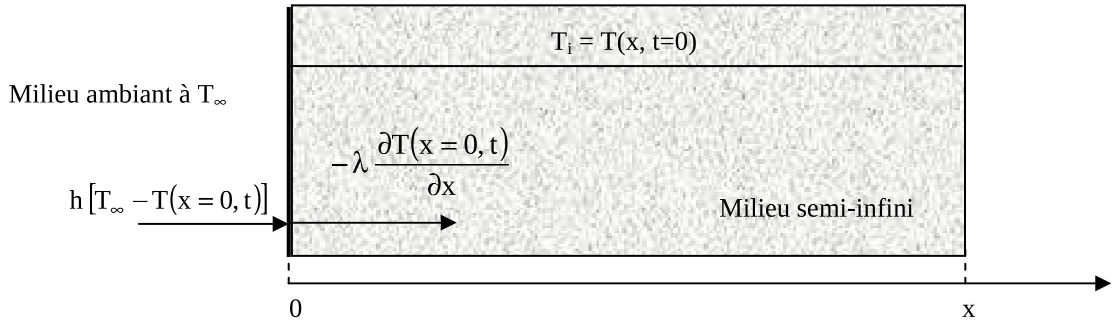


Figure 3.4 : Schéma du milieu semi-infini avec coefficient de transfert convectif imposé

Avec les conditions aux limites :
$$\begin{cases} T(x,0) = T_i & (b) \\ T(\infty,t) = T_i & (c) \\ -\lambda \dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h\left[T_\infty - T(x=0,t)\right] & (d) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\overline{T} = T - T_i$

D'où : $\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \dfrac{\partial T}{\partial t}$

L'équation *(a)* peut alors s'écrire : $\dfrac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial t}$

Les conditions aux limites deviennent :
$$\begin{cases} \overline{T}(x,0) = 0 & (b) \\ \overline{T}(\infty,t) = 0 & (c) \\ \lambda \dfrac{\partial \overline{T}(0,t)}{\partial x} = h\left[\overline{T}(x=0,t) - (T_\infty - T_i)\right] & (d) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'équation *(a)* conduit à : $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - \dfrac{1}{a}\left[p\,\theta - \overline{T}(x,0)\right] = 0$ avec $\overline{T}(x,0) = 0$

D'où : $\theta(x,p) = A\,e^{-qx} + B\,e^{+qx}$

La température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc B = 0 et $\theta(x,p) = A\,e^{-qx}$

La transformée de Laplace de l'équation *(d)* s'écrit : $\lambda \dfrac{d\theta}{dx}(0,p) = h\,\theta(0,p) + \dfrac{h\,(T_i - T_\infty)}{p}$

Soit : $-\lambda\,A\,q = h\,A + \dfrac{h\,(T_i - T_\infty)}{p}$ d'où : $A = \dfrac{\dfrac{h}{\lambda}(T_\infty - T_i)}{p\left(\dfrac{h}{\lambda} + q\right)}$

et $\theta(x,p) = \ell\,(T_\infty - T_i)\,\dfrac{e^{-q\,x}}{p\,(q+\ell)}$ où $\ell = \dfrac{h}{\lambda}$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.3.2 conduit au résultat suivant :

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\,t}}\right) + \exp\left(\frac{h\,x}{\lambda} + \frac{a\,h^2\,t}{\lambda^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\,t}} + \frac{h\sqrt{a\,t}}{\lambda}\right) \qquad (3.8)$$

Pour un calcul approché, on trouvera en annexe A.3.5 une abaque représentant graphiquement cette formule.

3.1.2.4 Température sinusoïdale imposée en surface, régime périodique établi

<u>Méthode</u> : Recherche d'une solution de même fréquence que l'excitation

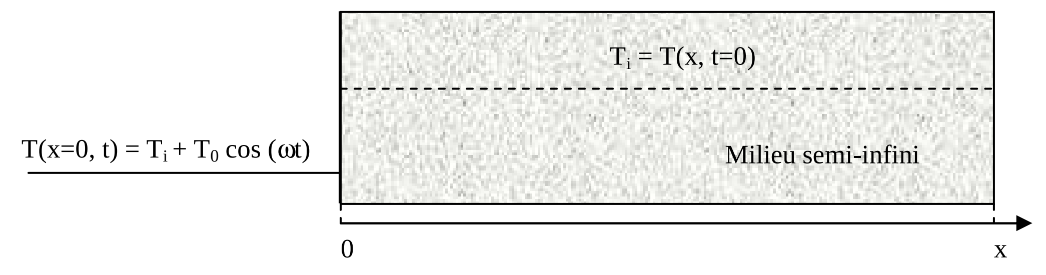


Figure 3.5 : Schéma du milieu semi-infini avec température sinusoïdale imposée en surface

L'équation de la chaleur s'écrit : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

Avec les conditions aux limites : $\begin{cases} T(0,t) = T_i + T_0 \cos(\omega t) & (b) \\ T(\infty,t) = T_i & (c) \end{cases}$

On recherche une solution en régime établi pour laquelle le champ de température du milieu évolue comme : $T(x,t) - T_i = \exp(i\omega t)\, f(x)$

Le problème étant linéaire, on considère soit la partie réelle soit la partie imaginaire de la solution selon que la température varie comme cos (ωt) ou sin (ωt). La fonction complexe f est solution de :

$\dfrac{d^2 f}{dx^2} - i\dfrac{\omega}{a} f = 0$ avec $f(0) = T_0$

$f(x) = A \exp\left(-\sqrt{\dfrac{i\omega}{a}}\, x\right) + B \exp\left(\sqrt{\dfrac{i\omega}{a}}\, x\right)$ avec $\sqrt{\dfrac{i\omega}{a}} = \sqrt{\dfrac{\omega}{2a}}\,(1+i)$

La fonction f doit rester finie quand x →∞ donc B = 0 et $f(0) = T_0$ entraîne $A = T_0$.

D'où : $T(x,t) - T_i = T_0 \exp\left[-\sqrt{\dfrac{\omega}{2a}}\,(1+i)\,x + i\,\omega t\right] = T_0 \exp\left(-\sqrt{\dfrac{\omega}{2a}}\, x\right) \exp\left[i\left(\omega t - \sqrt{\dfrac{\omega}{2a}}\, x\right)\right]$

Soit en prenant la partie réelle de la solution :

$$T(x,t) = T_i + T_0\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\, x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}\, x\right) \qquad (3.9)$$

Remarques :

- L'amplitude des oscillations décroît rapidement lorsqu'on s'éloigne de l'interface.
- L'amplitude des oscillations décroît également rapidement quand la fréquence de l'excitation augmente : une excitation de fréquence élevée appliquée à la surface d'un solide ne modifiera sa température que sur une faible profondeur.
- Entre les températures T_1 et T_2 de 2 points distants respectivement de x_1 et x_2 de la surface, il existe un déphasage égal à $\sqrt{\dfrac{\omega}{2a}}\,(x_1 - x_2)$. La connaissance de ω et la mesure de la température au sein du milieu en deux points situés à des distances connues x_1 et x_2 de la surface peut permettre d'évaluer la diffusivité thermique a.

3.1.2.5 Contact brusque entre deux milieux semi-infinis

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

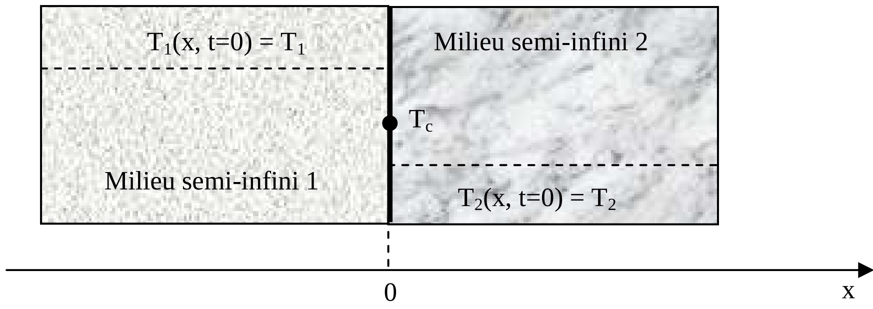


Figure 3.6 : Schéma du contact brusque entre deux milieux semi-infinis

On considère deux milieux semi-infinis initialement à deux températures uniformes différentes T_{i1} et T_{i2}. A l'instant initial, on place les deux milieux en contact et l'on recherche l'évolution de la température au sein des deux milieux.

L'équation de la chaleur s'écrit pour chacun des deux milieux :

$$\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} \quad (a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} \quad (b)$$

L'origine des abscisses est prise au point de contact entre les deux milieux. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} T_1(x, 0) = T_{i1} & (c) \\ T_2(x, 0) = T_{i2} & (d) \\ \lambda_1 \dfrac{\partial T_1(0,t)}{\partial x} = \lambda_2 \dfrac{\partial T_2(0,t)}{\partial x} & (e) \\ T_1(0,t) = T_2(0,t) & (f) \end{cases}$$

On effectue les changements de variable suivants : $\overline{T_1} = T_1 - T_{i1}$ et $\overline{T_2} = T_2 - T_{i2}$

Les équations *(a)* et *(b)* peuvent alors s'écrire : $\dfrac{\partial^2 \overline{T_1}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial \overline{T_1}}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 \overline{T_2}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial \overline{T_2}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \overline{T_i}(x,0) = 0 \quad i = 1, 2 & (c) \\ \overline{T_i}(\infty,t) = 0 \quad i = 1, 2 & (d) \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \overline{T_1}(0,t)}{\partial x} = \lambda_2 \dfrac{\partial \overline{T_2}(0,t)}{\partial x} & (e) \\ \overline{T_1}(0,t) = \overline{T_2}(0,t) + T_{i2} - T_{i1} & (f) \end{cases}$$

Les transformées de Laplace des équations *(a)* et *(b)* conduisent comme dans les cas précédents à des solutions du type : $\theta_1(x,p) = A_1\, e^{-q_1 x} + B_1\, e^{+q_1 x}$ et $\theta_2(x,p) = A_2\, e^{-q_2 x} + B_2\, e^{+q_2 x}$

La température garde une valeur finie quand x tend vers $\pm\infty$ donc $A_1 = 0$ et $B_2 = 0$, nous en déduisons que :

$$\theta_1(x,p) = B_1\, e^{q_1 x} \quad \text{et} \quad \theta_2(x,p) = A_2\, e^{-q_2 x}$$

Les transformées de Laplace des équations *(e)* et *(f)* s'écrivent alors :

$$\begin{cases} B_1 \lambda_1 q_1 = -A_2 \lambda_2 q_2 & (e) \\ B_1 = A_2 + \dfrac{T_{i2} - T_{i1}}{p} & (f) \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire permet de calculer les valeurs de B_1 et de A_2 :

$$B_1 = \frac{E_2}{E_1 + E_2}\left(T_{i2} - T_{i1}\right)\frac{1}{p} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{E_1}{E_1 + E_2}\left(T_{i1} - T_{i2}\right)\frac{1}{p}$$

Où $E_i = \sqrt{\lambda_i \rho_i c_i}$ est l'effusivité thermique du milieu i.

On en déduit les valeurs de θ_1 et de θ_2 :

$$\theta_1(x,p) = \frac{E_2\left(T_{i2} - T_{i1}\right)}{\left(E_1 + E_2\right)p}\, e^{q_1 x} \quad \text{et} \quad \theta_2(x,p) = \frac{E_1\left(T_{i1} - T_{i2}\right)}{\left(E_1 + E_2\right)p}\, e^{-q_2 x}$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.3.2 conduit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{T_1(x,t)-T_{i1}}{T_{i2}-T_{i1}} &= \frac{E_2}{E_1+E_2}\ \mathrm{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{a_1\,t}}\right) \\ \frac{T_2(x,t)-T_{i2}}{T_{i1}-T_{i2}} &= \frac{E_1}{E_1+E_2}\ \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2\,t}}\right) \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Propriété de la température de contact T_c : elle se calcule par : $T_c(t) = T_1(0,t) = T_2(0,t)$ sachant que erfc (0) = 1.

D'où :

$$T_c = \frac{E_1\,T_{i1} + E_2\,T_{i2}}{E_1 + E_2} \qquad (3.11)$$

On remarque que la température de contact entre les deux milieux reste constante pendant toute la durée du transfert de chaleur. C'est le milieu qui a la plus grande effusivité thermique qui impose la température de contact.

Application : Sensation thermique lors du contact de la peau avec un métal ou un isolant, choix de matériaux améliorant le confort thermique.

3.1.2.6 Contact brusque entre deux milieux semi-infinis avec résistance de contact

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

On considère deux milieux semi-infinis initialement à deux températures uniformes différentes T_{i1} et T_{i2}. A l'instant initial, on place les deux milieux en contact et l'on recherche l'évolution de la température au sein des deux milieux. Le contact entre les deux milieux est imparfait et l'on doit tenir compte d'une résistance de contact Rc = 1/h (°C.W^{-1}.m^{-2}) à l'interface.

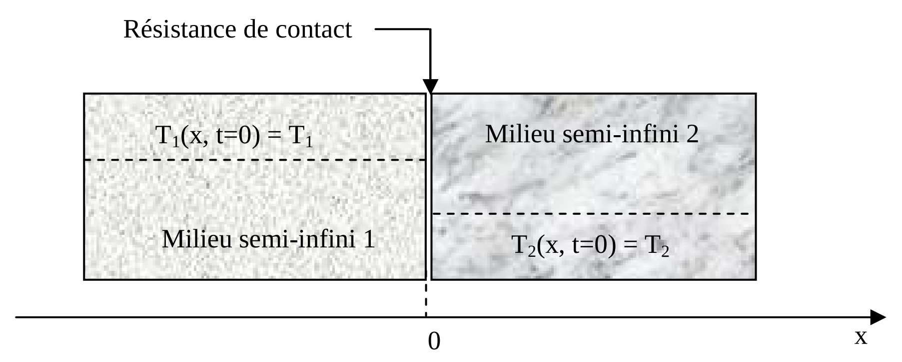


Figure 3.7 : Schéma du contact entre deux milieu semi-infinis avec résistance à l'interface

L'équation de la chaleur s'écrit pour chacun des deux milieux :

$$\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} \quad (a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} \quad (b)$$

L'origine des abscisses est prise au point de contact entre les deux milieux. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial T_1(0,t)}{\partial x} = \lambda_2 \dfrac{\partial T_2(0,t)}{\partial x} & (c) \\ \lambda_1 \dfrac{\partial T_1(0,t)}{\partial x} = h\left[T_1(0,t) - T_2(0,t)\right] & (d) \end{cases}$$

On effectue les changements de variable suivants : $\overline{T_1} = T_1 - T_{i1}$ et $\overline{T_2} = T_2 - T_{i2}$

Les équations *(a)* et *(b)* peuvent alors s'écrire : $\frac{\partial^2 \overline{T_1}}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \overline{T_1}}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 \overline{T_2}}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \overline{T_2}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial \overline{T_1}(0,t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial \overline{T_2}(0,t)}{\partial x} & (c) \\ -\lambda_1 \frac{\partial \overline{T_1}(0,t)}{\partial x} = h\left[\overline{T_1}(0,t) - \overline{T_2}(0,t) + T_{i1} - T_{i2}\right] & (d) \end{cases}$$

Les transformées de Laplace des équations *(a)* et *(b)* conduisent comme dans le cas précédent à des solutions du type : $\theta_1(x,p) = A_1\, e^{+q_1 x}$ et $\theta_2(x,p) = A_2\, e^{-q_2 x}$

Les transformées de Laplace des équations *(c)* et *(d)* s'écrivent alors :

$$\begin{cases} A_1 \lambda_1 q_1 = -A_2 \lambda_2 q_2 & (c) \\ -A_1 \lambda_1 q_1 = h\left(A_1 - A_2\right) + \frac{h\left(T_{i1} - T_{i2}\right)}{p} & (d) \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire permet d'établir l'expression de A_1 et de A_2 :

$$A_1 = \frac{\frac{h}{\lambda_1}\left(T_{i2} - T_{i1}\right)}{\frac{h}{\lambda_1}\left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) + q_1}\,\frac{1}{p} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{\frac{h}{\lambda_2}\left(T_{i2} - T_{i1}\right)}{\frac{h}{\lambda_2}\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) + q_2}\,\frac{1}{p}$$

On en déduit :

$$\theta_1(x,p) = c_1\,\frac{e^{q_1 x}}{p\,(q_1 + b_1)} \quad \text{avec} \quad c_1 = \frac{h}{\lambda_1}\left(T_{i2} - T_{i1}\right) \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{h}{\lambda_1}\left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right)$$

$$\theta_2(x,p) = c_2\,\frac{e^{-q_2 x}}{p\,(q_2 + b_2)} \quad \text{avec} \quad c_2 = \frac{h}{\lambda_2}\left(T_{i1} - T_{i2}\right) \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{h}{\lambda_2}\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.3.2 conduit au résultat suivant :

$$\frac{T_1(x,t) - T_{i1}}{T_{i2} - T_{i1}} = \frac{E_2}{E_2 - E_1}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) - \exp(b_1 x + a_1 b_1^2 t)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} + b_1\sqrt{a_1 t}\right)\right]$$
$$\frac{T_2(x,t) - T_{i2}}{T_{i1} - T_{i2}} = \frac{E_1}{E_2 - E_1}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) - \exp(b_2 x + a_2 b_2^2 t)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}} + b_2\sqrt{a_2 t}\right)\right] \quad (3.12)$$

3.1.3 Transfert unidirectionnel dans des milieux limités : plaque, cylindre, sphère

3.1.3.1 Plaque infinie

On considère le cas d'une plaque d'épaisseur 2L et de dimensions latérales suffisamment grandes pour que l'on puisse considérer que le transfert de chaleur est unidirectionnel. L'étude de ce cas permettra d'illustrer les différentes méthodes utilisées pour résoudre l'équation de la chaleur monodimensionnelle en régime variable.

1er cas : Plaque avec température constante imposée en surface

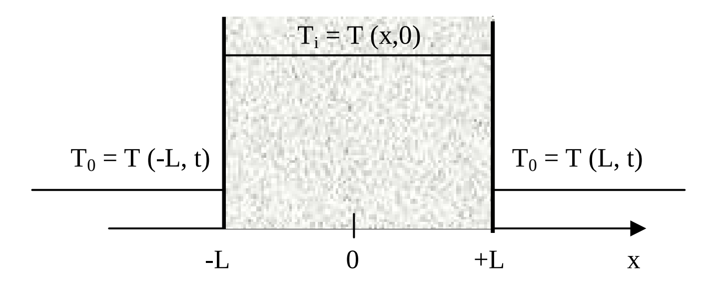


Figure 3.8 : Schéma d'une plaque avec température imposée en surface

1ère méthode : Transformée de Laplace, développement en série et inversion terme à terme par les tables.

L'équation de la chaleur s'écrit : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

Avec les conditions aux limites :
$$\begin{cases} T(x,0) = T_i & (b) \\ T(L,t) = T_0 & (c) \\ \dfrac{\partial T}{\partial x}(0,t) = 0 & (d) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\overline{T} = T - T_i$

d'où : $\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial x}$

L'équation *(a)* peut alors s'écrire : $\dfrac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent :
$$\begin{cases} \overline{T}(x,0) = 0 & (b) \\ \overline{T}(x = L, t) = T_0 - T_i & (c) \\ \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial x}(0,t) = 0 & (d) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de $\overline{T}(x,t)$ par rapport au temps s'écrit : $\theta(x,p) = L\{\overline{T}(t)\} = \int_0^\infty \exp(-p\,t)\,\overline{T}(x,t)\,dt$

La transformée de Laplace de l'équation *(a)* conduit à : $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - \dfrac{1}{a}\left[p\,\theta - \overline{T}(x,0)\right] = 0$ avec $\overline{T}(x,0) = 0$

Cette équation est donc de la forme : $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - q^2\,\theta = 0$ avec $q^2 = \dfrac{p}{a}$

D'où : $\theta(x,p) = A\cosh(qx) + B\sinh(qx)$

La transformée de Laplace de l'équation *(d)* conduit à : $\lambda \dfrac{d\theta}{dx}(x=0) = 0$ d'où $B = 0$ et $\theta = A\cosh(qx)$

La transformée de Laplace de l'équation *(c)* conduit à : $\theta(L,p) = \dfrac{T_0 - T_i}{p}$ d'où $A = \dfrac{T_0 - T_i}{p\cosh(qL)}$

et $\theta(x,p) = \dfrac{(T_0 - T_i)\cosh(qx)}{p\,\cosh(qL)} = \dfrac{\Delta T\cosh(qx)}{p\,\cosh(qL)}$

Nous pouvons utiliser un développement en série de $\dfrac{1}{1+e^{-2qL}}$ pour écrire θ(x,p) sous la forme :

$$\theta(x,p) = \frac{\Delta T}{p}\,\frac{e^{qx} + e^{-qx}}{e^{qL}\left(1+e^{-2qL}\right)} = \frac{\Delta T}{p}\left[e^{-q(L-x)} + e^{-q(L+x)}\right]\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,e^{-2nqL}$$

$$\theta(x,p)=\frac{\Delta T}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ e^{-q[(2n+1)L-x]}+\frac{\Delta T}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ e^{-q[(2n+1)L+x]}$$

La transformation inverse de Laplace terme à terme (propriété de linéarité) conduit à :

$$\frac{T-Ti}{T_0-T_i}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \mathrm{erfc}\left[\frac{(2n+1)L-x}{2\sqrt{at}}\right]+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \mathrm{erfc}\left[\frac{(2n+1)L+x}{2\sqrt{at}}\right] \qquad (3.13)$$

Cette solution converge rapidement pour les faibles valeurs de t.

2ème méthode : Décomposition de la température en un produit de fonctions et superposition des solutions.

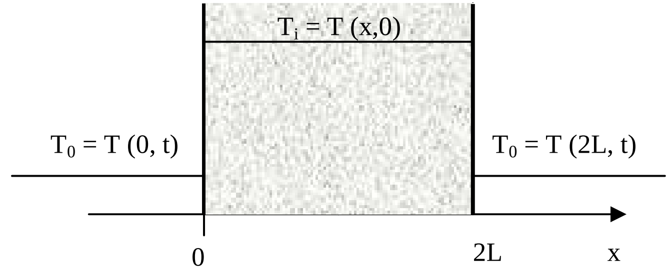


Figure 3.9 : Schéma d'une plaque avec température imposée en surface

L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

Avec les conditions aux limites : $\begin{cases} T(x,0)=T_i & (b)\\ T(0,t)=T(2L,t)=T_0 & (c)\end{cases}$

On effectue le changement de variable suivant : $\overline{T}=T-T_0$

L'équation *(a)* peut alors s'écrire : $\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent : $\begin{cases} \overline{T}(x,0)=T_i-T_0 & (b)\\ \overline{T}(x=0,t)=\overline{T}(x=2L,t)=0 & (c)\end{cases}$

On peut aussi considérer par raison de symétrie une plaque d'épaisseur L en prenant une condition de flux nul en x = L soit pour la seconde condition limite : $\frac{\partial T(L,t)}{\partial x}=0$ *(d)*

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonctions sous la forme : $T(x,t)=X(x)Y(t)$. L'équation de la chaleur conduit à l'équation suivante :

$X''Y=\frac{1}{a}XY'$ ou : $\frac{X''}{X}=\frac{1}{a}\frac{Y'}{Y}=-\omega^2$

Où ω est une constante car les deux fonctions X et Y dépendent l'une de x et l'autre de t. Nous en déduisons :

$$\begin{cases} X''+\omega^2 X=0 \Rightarrow X=A_1\cos(\omega x)+B_1\sin(\omega x)\\ Y'+a\,\omega^2 Y=0 \Rightarrow Y=Ce^{-a\omega^2 t}\end{cases}$$

Et $\overline{T}(x,t)=e^{-a\omega^2 t}[A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)]$

La condition limite $\overline{T}(0,t)=0$ s'écrit alors : A =0

d'où : $\overline{T}(x,t)=B\sin(\omega x)e^{-a\omega^2 t}$, les fonctions $\psi_n(x)=\sin(\omega_n x)$ sont les fonctions propres du système.

La condition limite $\frac{\partial \overline{T}(L,t)}{\partial x} = 0$ pour tout t s'écrit alors : $B\cos(\omega L) = 0$

Cette équation admet une infinité de solutions que l'on appelle les valeurs propres : $\omega_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$ avec n variant de 0 à l'infini.

Le théorème de superposition des solutions permet d'écrire la solution générale de *(a)* sous la forme :

$$\overline{T}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin(\omega_n x)\exp\left(-a\,\omega_n^{\,2}\,t\right)$$

La méthode générale de résolution est la suivante :

Les termes D_n sont déterminés en calculant $\int_0^L \overline{T}(x,0)\,\psi_m(\omega_n x)dx$ de deux manières :

- En remplaçant $\overline{T}(x,0)$ par son expression déduite des données du système à l'état initial : $\overline{T}(x,0) = T_i(x)$ *(g)*
- En remplaçant $\overline{T}(x,0)$ par $\overline{T}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin(\omega_n x)$, on obtient la somme infinie : $\int_0^L \overline{T}(x,0)\,dx = \sum_0^{\infty}\int_0^L D_n\ \psi_n(\omega_n x)\ \psi_m(\omega_m x)dx$

  On montre que si $n \neq m$ alors $\int_0^L \psi_n(\omega_n x)\,\psi_m(\omega_m x)\,dx = 0$ (orthogonalité des fonctions propres)

  donc : $\int_0^L \overline{T}(x,0)\,dx = \int_0^L D_n\ \psi_m^{\,2}(\omega_m x)\,dx$ *(h)*

On détermine la valeur des constantes D_m en égalant les expressions *(g)* et *(h).*

Appliquons cette méthode à l'exemple traité :

On a : $\int_0^L \overline{T}(x,0)\,\psi_m(\omega_n x)dx = \int_0^L (T_i - T_0)\sin(\omega_n x)\,dx = \frac{T_i - T_0}{\omega_n}$

et : $\int_0^L \overline{T}(x,0)\,\psi_m(\omega_m x)dx = \int_0^L D_m \sin^2(\omega_m x)\,dx = D_m \int_0^L \sin^2(\omega_m x)\,dx = D_m\ \frac{L}{2}$

On en déduit : $D_m = \frac{2\,(T_i - T_0)}{\omega_n\ L} = \frac{4\,(T_i - T_0)}{(2n+1)\,\pi}$

et finalement :

$$\overline{T}(x,t) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right]\exp\left[-(2n+1)^2\ \frac{\pi^2}{4}\ \frac{a\,t}{L^2}\right] \quad (3.14)$$

Cette solution converge pour un petit nombre de termes pour les valeurs élevées de t (le premier terme peut suffire pour t élevé).

Remarque : Dans le cas de l'utilisation des coordonnées cylindriques on calculera plutôt l'intégrale : $\int_0^L \overline{T}(r,0)\,r\ \psi_m(\omega_n r)\,dr$ pour déterminer la valeur des constantes D_m.

Une autre méthode moins générale consiste à écrire la condition limite $\overline{T}(x,0) = T_i - T_0$ sous la forme :

$\overline{T}(x,0) = T_i - T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right]$ et à utiliser ensuite un développement en série de Fourier de la condition initiale sur le domaine.

En effet, une fonction f définie sur [0,L] peut s'écrire sous forme d'une série de Fourier en sinus :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{avec} \quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Nous pouvons effectuer un développement en série de Fourier en sinus de f(x) = (T_i - T_0) sur l'intervalle [0,2L] :

$$T_i-T_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{L}\left[\int_0^{2L}(T_i-T_0)\sin\left(\frac{n\pi u}{2L}\right)du\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{L}(T_i-T_0)\frac{-2L}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi u}{2L}\right)\right]_0^{2L}\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

$$T_i-T_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(T_i-T_0)}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(T_i-T_0)}{(2n+1)\pi}\,2\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]$$

$$T_i-T_0=\frac{4(T_i-T_0)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]$$

Par identification, nous en déduisons : $D_n=\dfrac{4(T_i-T_0)}{\pi(2n+1)}$, nous retrouvons le résultat établi précédemment.

3ème méthode : Utilisation d'une transformation intégrale sur la variable d'espace.

Principe de l'utilisation d'une transformée intégrale à la résolution de l'équation de la chaleur :

On applique à l'équation de la chaleur et aux équations résultantes des conditions aux limites une transformation intégrale permettant d'obtenir une nouvelle équation différentielle dont la résolution (plus aisée) conduit à l'expression de la température θ dans l'espace transformé. On applique ensuite à θ la transformation inverse pour obtenir l'expression de la température T dans l'espace réel.

Le choix de la transformation intégrale la mieux adaptée dépend de la configuration et des conditions aux limites. Si la température dépend de la variable d'espace r, on choisit une transformation du type suivant :

$$\theta(\omega)=\int_D w(r)\,T_\omega(r,\omega)\,T(r,t)\,dr$$

où D est le domaine de définition de la température et $T_\omega(r,t)$ est une fonction propre solution du système formé par l'équation de la chaleur et les conditions aux limites pour un nombre infini de valeurs ω_n (n = 1, 2,…..). L'équation dont les ω_n sont solutions est appelée l'équation transcendante. La fonction w(r) est choisie constante et égale à 1 en géométrie rectangulaire et égale à r en géométrie cylindrique. La formule générale d'inversion est alors la suivante :

$$T(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{\omega_n}(\omega_n,r)}{N(\omega_n)}\theta(\omega_n) \qquad \text{avec :} \quad N(\omega_n)=\int_D\left[T_{\omega_n}(\omega_n,r)\right]^2 w(r)\,dr$$

$N(\omega_n)$ est appelée la norme de la fonction propre $T_\omega(r,t)$.

On trouvera en annexe A.3.1 la définition et les propriétés des transformations les plus utilisées : Laplace, Fourier et Hankel. On trouvera également en annexe A.3.3 un tableau donnant les fonctions propres et leurs normes, les équations transcendantes et les valeurs propres pour les cas de figure les plus courants.

On applique cette méthode au cas de figure schématisé sur la figure 3.9.

L'équation de la chaleur s'écrit : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x,0)=T_i & (b) \\ T(0,t)=T(2L,t)=T_0 & (c) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\overline{T}=T-T_i$

Selon l'annexe A.3.3, la fonction propre est $T_\omega(x,t)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, on applique donc une transformation (finie car le milieu est fini) de Fourier en sinus (cf. annexe A.2.2) à l'équation (a) :

$$F_s[a] \quad \Rightarrow \quad \frac{n\pi}{L}\left[\overline{T}(0)-(-1)^n\,\overline{T}(L)\right]-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,\theta_s(n)=\frac{1}{a}\frac{d\theta_s}{dt}(n) \quad \text{avec} \quad \overline{T}(x=0)=\overline{T}(x=2L)=T_0-T_i$$

d'où : $\frac{n\pi(T_0-T_i)}{L}\left[1-(-1)^n\,1\right]-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,\theta_s(n)=\frac{1}{a}\frac{d\theta_s}{dt}(n)$

La solution générale de cette équation s'écrit : $\theta_s(n)=\frac{L(T_0-T_i)}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]+A\,\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 at}{L^2}\right)$

La condition limite $\overline{T}(x,t=0)=0$ conduit à : $\theta_s(n)=\frac{L(T_0-T_i)}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]+\left[1-\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a\,t}{L^2}\right)\right]$

La transformée inverse permet de calculer T(x,t) :

$$T(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]+\left[1-\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a\,t}{L^2}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$T(x,t)=\frac{4(T_0-T_i)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left[1-\exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a\,t}{L^2}\right)\right]\sin\left(\frac{[2n+1]\pi x}{L}\right)$$

Un développement de la fonction constante et égale à 1 en série de sinus permet de retrouver le résultat de la 2ème méthode.

4ème méthode : Transformation de Laplace, résolution et inversion par une méthode numérique (Stehfest ou sous-programme Invlap sous Matlab : http://www.mathtools.net/files/net/invlap.zip).

Nous avons montré en appliquant la 1ère méthode que la transformée de la température T(x,t) – T_i s'écrit :

$$\theta(x,p)=\frac{(T_0-T_i)\cosh(qx)}{p\,\cosh(qL)}=\frac{\Delta T\,\cosh(qx)}{p\,\cosh(qL)} \qquad \text{avec} \quad q=\sqrt{\frac{p}{a}}$$

La température T(x,t) peut s'en déduire en utilisant Invlap ou en appliquant la méthode de Stehfest pour trouver la transformée de Laplace inverse de θ(x,p) :

$$T(x,t)=T_i+\frac{\ln(2)}{t}\sum_{j=1}^{N}V_j\,\theta\left(x,\frac{j\ln(2)}{t}\right) \qquad (3.15)$$

Un nombre de termes N=10 est suffisant pour obtenir une précision satisfaisante. Les valeurs des coefficients V_j correspondants sont donnés en annexe A.3.2.

Comparaison des méthodes :

La méthode permettant d'arriver le plus simplement à une valeur de T(x,t) est la 4ème méthode qui ne fournit toutefois qu'une solution numérique approchée de la solution et qui n'est pas à l'abri d'instabilités numériques dans certains cas très particuliers. Un nombre de termes N = 10 dans la formule (3.15) permet d'obtenir une précision satisfaisante. Viennent ensuite par ordre de difficulté croissante la 1ère méthode puis la 2ème et la 3ème méthode.

Le premier terme de la formule (3.13) représente bien la température aux temps courts alors que le premier terme de la formule (3.14) représente bien la température aux temps longs.

On trouvera à titre d'illustration sur la figure 3.10 la représentation de la température réduite $\frac{T(x,t)-T_i}{T_0-T_i}$ à 2,5 cm du bord d'une plaque d'épaisseur 10 cm pour un matériau de diffusivité a = 10^{-6} $m^2.s^{-1}$

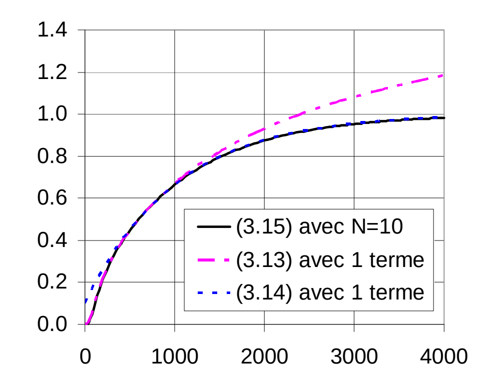


Figure 3.10 : Température réduite dans une plaque calculée par les différentes relations

2ème cas : Plaque avec flux imposé

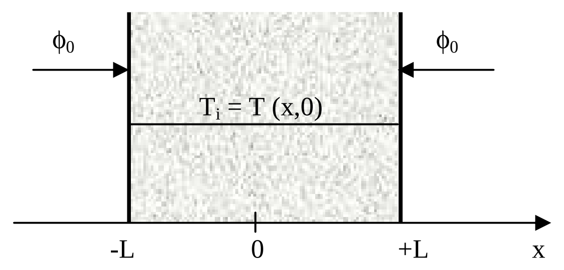


Figure 3.11 : Schématisation d'une plaque avec flux de chaleur imposé en surface

L'équation de la chaleur s'écrit : $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (a)$$

Avec les conditions aux limites :
$$\begin{cases} T(x,0) = T_i & (b) \\ \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 & (c) \\ \lambda \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = \phi_0 & (d) \end{cases}$$

En utilisant les deux premières méthodes du paragraphe précédent, on arrive aux résultats suivants :

$$T = T_i + \frac{\phi_0 t}{\rho c L} + \frac{\phi_0 L}{\lambda}\left[\frac{3x^2 - L^2}{6L^2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\exp\left(-\frac{a\, n^2 \pi^2 t}{L^2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \qquad (3.16)$$

$$T = T_i + \frac{2\phi_0\sqrt{at}}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\operatorname{ierfc}\left(\frac{(2n+1)L - x}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{ierfc}\left(\frac{(2n+1)L + x}{2\sqrt{at}}\right)\right] \qquad (3.17)$$

Ces formules sont complexes à calculer car elles comportent une somme infinie de termes.

L'application de la 1ère méthode au cas de la plaque avec température de surface imposée a permis de montrer que la transformée de Laplace de la température $T(x,t) - T_i$ s'écrivait : $\theta(x,p) = A\cosh(qx)$.

On a la condition limite en x = L: $-\lambda \dfrac{\partial T(L,t)}{\partial x} = \phi_0$

La transformée de Laplace de cette équation conduit à : $-\lambda\, A\, q \sinh(q\, L) = \dfrac{\phi_0}{p}$

D'où : $A = \dfrac{\phi_0}{p} \dfrac{1}{\lambda\, q \sinh(q\, L)}$

Et : $$\theta(x,p) = \frac{\phi_0}{p} \frac{\cosh(q\, x)}{\lambda\, q \sinh(q\, L)} \qquad (3.18)$$

La température T(x,t) peut s'en déduire facilement en appliquant une méthode numérique (Invlap ou Stehfest) pour trouver la transformée de Laplace inverse de θ(x,p).

On aboutit facilement par cette méthode à une solution beaucoup plus simple à calculer que celle donnée par les formules (3.16) ou (3.17).

3ème cas : Plaque avec coefficient de transfert imposé

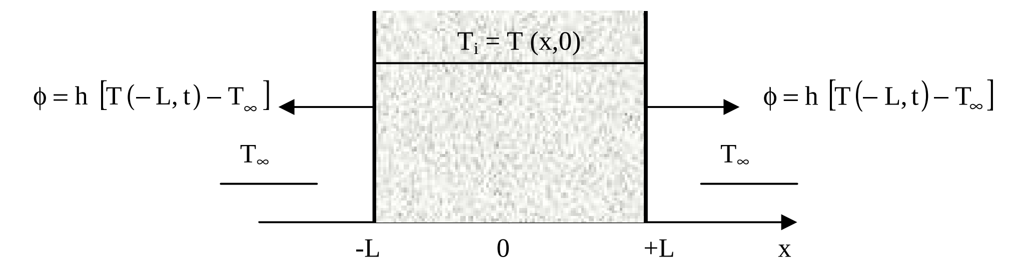


Figure 3.12 : Schématisation d'une plaque avec coefficient de transfert imposé en surface

L'équation de la chaleur s'écrit : $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (a)$$

Avec les conditions aux limites :
$$\begin{cases} T(x,0) = T_i & (b) \\ \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 & (c) \\ -\lambda \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = h\left[T(L,t) - T_\infty\right] & (d) \end{cases}$$

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonctions sous la forme : $\overline{T}(x,t) = T(x,t) - T_i = X(x)Y(t)$. L'équation de la chaleur conduit à l'équation suivante :

$$X''Y = \frac{1}{a} XY' \quad \text{ou :} \quad \frac{X''}{X} = \frac{1}{a}\frac{Y'}{Y} = -\omega^2$$

Où ω est une constante car les deux fonctions X et Y dépendent l'une de x et l'autre de t. Nous en déduisons :

$$\begin{cases} X'' + \omega^2 X = 0 \;\Rightarrow\; X = A_1 \cos(\omega x) + B_1 \sin(\omega x) \\ Y' + a\,\omega^2 Y = 0 \;\Rightarrow\; Y = C e^{-a\omega^2 t} \end{cases}$$

Et $\overline{T}(x,t) = e^{-a\omega^2 t}\left[A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)\right]$

La condition limite $\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial x}(0,t) = 0$ s'écrit alors : B =0

d'où : $\overline{T}(x,t) = A\, e^{-a\omega^2 t} \cos(\omega x)$ et $\dfrac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x} = -\omega A \exp\left(-a\,\omega^2\, t\right) \sin(\omega x)$, les fonctions propres du système sont : $\psi_n(x) = \cos(\omega_n\, x)$.

La condition limite $-\lambda \dfrac{\partial \overline{T}(L,t)}{\partial x} = h\, \overline{T}(L,t)$ pour tout t s'écrit alors : $\omega \tan(\omega L) = \dfrac{h}{\lambda}$

Cette équation admet une infinité de solutions (valeurs propres) ω_n

La solution générale de *(a)* s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des solutions particulières :

$$\overline{T}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\omega_n x) \exp\left(-a\,\omega_n{}^2\, t\right)$$

On a d'une part : $\displaystyle\int_0^L \overline{T}(x,0)\, \psi_m(\omega_n x)\, dx = \int_0^L (T_i - T_0) \cos(\omega_n x)\, dx = \frac{T_i - T_0}{\omega_n} \sin(\omega_n\, L)$

Et d'autre part :

$$\int_0^L \overline{T}(x,0)\, \psi_m(\omega_m x)\, dx = \int_0^L D_m \cos^2(\omega_m x)\, dx = D_m \int_0^L \frac{1+\cos(2\,\omega_n\, x)}{2}\, dx = D_m \left[\frac{L}{2} + \frac{1}{4\,\omega_n} \sin(2\,\omega_n\, L)\right]$$

soit : $\displaystyle\int_0^L \overline{T}(x,0)\, \psi_m(\omega_m x)\, dx = D_m \left[\frac{L}{2} + \frac{1}{4\,\omega_n} \frac{2\tan(\omega_n\, L)}{1+\tan^2(\omega_n\, L)}\right] = \frac{D_m}{2}\left[L + \frac{1}{\omega_n} \frac{\dfrac{h}{\lambda\,\omega}}{1+\dfrac{h^2}{\lambda^2\, \omega^2}}\right]$

On en déduit : $D_m = 2\,(T_i - T_0) \dfrac{\omega_n{}^2 + \dfrac{h^2}{\lambda^2}}{L\left(\omega_n{}^2 + \dfrac{h^2}{\lambda^2}\right) + \dfrac{h}{\lambda}} \dfrac{\sin(\omega_n\, L)}{\omega_n}$

Et finalement :

$$T(x,t) = T_0 + 2(T_i - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-a\omega_n{}^2 t\right) \frac{\omega_n{}^2 + \dfrac{h^2}{\lambda^2}}{L\left(\omega_n{}^2 + \dfrac{h^2}{\lambda^2}\right) + \dfrac{h}{\lambda}} \frac{\sin(\omega_n\, L)}{\omega_n} \cos(\omega_n x) \qquad (3.19)$$

Où ω_n (n = 1,2,…) sont les solutions de l'équation : $\omega \tan(\omega L) = \dfrac{h}{\lambda}$.

L'application de la 1ère méthode au cas de la plaque avec température de surface imposée a permis de montrer que la transformée de Laplace de la température T(x,t) –T_i s'écrivait : θ(x,p) = A cosh(qx).

On a la condition limite en x = L : $-\lambda \dfrac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h\,[T(L,t) - T_0] = h\,[T(L,t) - T_i] + h\,[T_i - T_0]$

La transformée de Laplace de cette équation conduit à : $-\lambda\, A\, q \sinh(q\,L) = h\, A \cosh(q\,L) + h\, \dfrac{T_i - T_0}{p}$

D'où : $A = \dfrac{T_0 - T_i}{p} \dfrac{1}{\cosh(q\,L) + \dfrac{\lambda\, q}{h} \sinh(q\,L)}$

Et :

$$\theta(x,p) = \frac{T_0 - T_i}{p} \frac{\cosh(q\,x)}{\cosh(q\,L) + \dfrac{\lambda\, q}{h} \sinh(q\,L)} \qquad (3.20)$$

La température T(x,t) peut s'en déduire facilement en appliquant une méthode numérique (Invlap ou Stehfest) pour trouver la transformée de Laplace inverse de θ(x,p).

3.1.3.2 Cylindre infini

Nous considérons ici un cylindre infini (longueur très grande par rapport au diamètre) de diamètre R initialement à la température T_i auquel on impose brutalement une température de surface T_0 (cf. figure 3.13). On peut faire l'hypothèse dans ce cas que le transfert de chaleur est uniquement radial.

1er cas : Cylindre infini avec température de surface imposée

On impose brutalement une température T_0 à la surface du cylindre initialement à la température uniforme T_i.

1ère méthode : Décomposition de la température en un produit de fonction et transformation de Hankel.

L'équation de la chaleur s'écrit : $$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (a)$$

Avec les conditions aux limites : $$\begin{cases} T(r, 0) = T_i & (b) \\ T(R, t) = T_0 & (c) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\overline{T} = T - T_0$

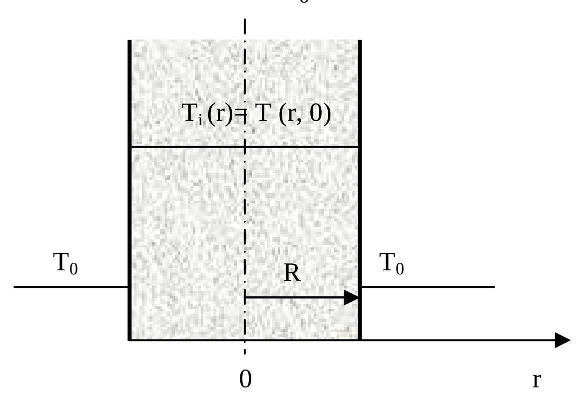


Figure 3.13 : Schématisation d'un cylindre infini avec température de surface imposée

Et les conditions aux limites deviennent : $$\overline{T}(r,0) = T_i - T_0 \qquad (b)$$
$$\overline{T}(R,t) = 0 \qquad (c)$$

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonctions sous la forme : $T(x,t) = X(r)Y(t)$. L'équation de la chaleur conduit à l'équation suivante :

$$X''Y + \frac{1}{r}X'Y = \frac{1}{a}XY' \quad \text{ou :} \quad \frac{X'' + \frac{X'}{R}}{X} = \frac{1}{a}\frac{Y'}{Y} = -\omega^2$$

où ω est une constante car les deux fonctions X et Y sont indépendantes. On en déduit :

$$\begin{cases} X'' + \frac{X'}{R} + \omega^2 X = 0 \;\Rightarrow\; X = AJ_0(\omega x) + BY_0(\omega x) \\ Y' + a\,\omega^2 Y = 0 \;\Rightarrow\; Y = Ce^{-a\omega^2 t} \end{cases}$$

Où J_0 est la fonction de Bessel de 1ère espèce non modifiée d'ordre 0 et Y_0 la fonction de Bessel de 2nde espèce non modifiée d'ordre 0. On trouvera en annexe A.2.3 la définition et les principales propriétés des fonctions de Bessel.

On en déduit que les solutions de *(a)* sont de la forme : $\overline{T} = Ce^{-a\omega^2 t}\left[AJ_0(\omega x) + BY_0(\omega x)\right]$

Par ailleurs on sait que $Y_0(0) = -\infty$ ce qui impose B = 0 d'où $\overline{T} = D\ e^{-a\omega^2 t}\ J_0(\omega x)$

La condition limite $\overline{T}(R,t) = 0$ s'écrit alors : $D\ e^{-a\omega^2 t}\ J_0(\omega x) = 0$ ce qui impose $\omega_n R = \beta_n$ où ω_n est une solution de l'équation $J_0(\omega R) = 0$.

Le théorème de superposition des solutions permet d'écrire la solution générale de *(a)* sous la forme :

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\ e^{-a\omega^2 t}\ J_0(\omega_n\ R)$$

La condition limite $\overline{T}(r,0) = T_i - T_0$ s'écrit alors : $T_i - T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\ J_0(\omega_n\ r)$ *(d)*

La fonction propre est $J_0(\omega x)$ ce qui nous amène à appliquer la transformée de Hankel à la condition limite *(d)* soit à multiplier chaque membre de l'équation *(d)* par $r\ J_0(\omega_m r)$ et à intégrer entre 0 et R :

$$\int_0^R r\ J_0(\omega_m r)(T_i - T_0)\,dr = \int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} D_n\ r J_0(\omega_m r) J_0(\omega_n r)\,dr = \int_0^R D_m\ r\,[J_0(\omega_m r)]^2\ dr$$

car on montre que $\int_0^R r J_0(\omega_n r)\, J_0(\omega_m r)\,dr = 0$ si $m \neq n$.

$$\int_0^R r\ J_0(\omega_m r)(T_i - T_0) = D_m \int_0^R r\ [J_0(\omega_m r)]^2\ dr = D_m \frac{R^2}{2}\left[J_0'(\omega_m r)\right]^2 = D_m \frac{R^2}{2}[J_1(\omega_m r)]^2$$

car les fonctions J_n vérifient les relations (cf. annexe A.2.3) :

$$\int_0^R r\left[J_n(\omega r)\right]^2 dr = \frac{R^2}{2}\left[J_n'(\omega r)\right]^2 \qquad \text{et} \qquad J_n'(\omega r) = -J_{n+1}(\omega r) + \frac{n}{\omega r} J_n(\omega r)$$

On en déduit finalement :

$$T(r,t) = T_0 + \frac{2(T_i - T_0)}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n r)}{\omega_n\ J_1(\omega_n r)}\ e^{-a\omega_n^2 t} \qquad (3.21)$$

Où ω_n (n = 1, 2, 3…) sont les racines de l'équation $J_0(\omega r) = 0$.

2ème méthode : Transformation de Laplace, résolution et inversion numérique (Invlap ou Sthefest).

L'équation de la chaleur s'écrit : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(r, 0) = T_i & (b) \\ T(R, t) = T_0 & (c) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\overline{T} = T - T_i$

La transformée de Laplace de l'équation (a) s'écrit : $\dfrac{d^2\theta}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{p}{a}\theta$ *(d)*

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{p}{a}}\ r = q\,r$

L'équation *(d)* s'écrit alors : $\dfrac{d^2\theta}{du^2} + \dfrac{1}{u}\dfrac{d\theta}{du} - \theta = 0$

La solution générale de cette équation de Bessel s'écrit (cf. annexe A.2.3) : $\theta(q\,r,p) = A\ I_0(q\,r) + B\ K_0(q\,r)$

On a la condition limite : $\dfrac{\partial T(0,t)}{\partial r} = 0$ d'où : $\dfrac{d\theta(r,p)}{dr} = 0$ et $\dfrac{d\theta(u,p)}{du} = 0$

Donc : $A\ I_1(0) - B\ K_1(0) = 0$ avec $K_1(0) \to \infty$ d'où B = 0.

La seconde condition limite s'écrit : $T(R,t) - T_0 = 0$ soit $T(R,t) - T_i = T_0 - T_i$ et $\theta(r,p) = \dfrac{T_0 - T_i}{p}$

On en déduit : $A = \dfrac{T_0 - T_i}{p} \dfrac{1}{I_0(qR)}$

Et finalement :
$$\theta(r,p) = \frac{T_0 - T_i}{p} \frac{I_0(qr)}{I_0(qR)} \qquad (3.22)$$

La température T(x,t) peut s'en déduire facilement en appliquant une méthode numérique (Invlap ou Stehfest) pour trouver la transformée de Laplace inverse de θ(x,p).

2ème cas : flux de chaleur imposé

On impose brutalement une densité de flux ϕ_0 à la surface du cylindre initialement à la température uniforme T_i.

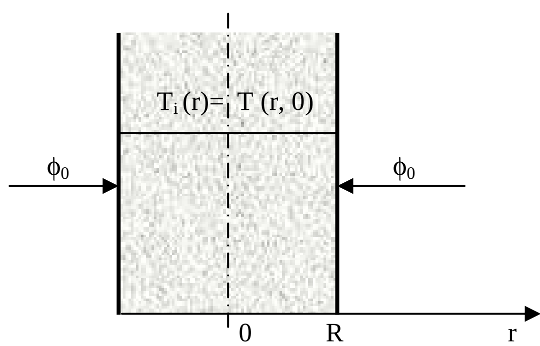


Figure 3.14 : Schématisation d'un cylindre infini avec flux de chaleur imposé

L'équation de la chaleur s'écrit : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

Avec les conditions aux limites :
$$\begin{cases} T(x,0) = T_i & (b) \\ \lambda \dfrac{\partial T}{\partial r}(R,t) = \phi_0 & (c) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\overline{T} = T - T_0$

L'équation *(a)* peut alors s'écrire : $\dfrac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent :
$$\begin{cases} \overline{T}(x,0) = T_i - T_0 & (b) \\ \lambda \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial r}(R,t) = \phi_0 & (c) \end{cases}$$

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonctions sous la forme : $T(x,t) = X(r)Y(t)$. L'équation de la chaleur conduit à l'équation suivante :

$$X''Y + \frac{1}{r}X'Y = \frac{1}{a}XY' \quad \text{ou :} \quad \frac{X'' + \frac{X'}{R}}{X} = \frac{1}{a}\frac{Y'}{Y} = -\omega^2$$

Dont la résolution mène au résultat suivant :

$$T(r,t) = T_i + \frac{2\phi_0 a t}{\lambda R} + \frac{\phi_0 R}{\lambda}\left[\frac{r^2}{2R^2} - \frac{1}{4} - 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\omega_n^2 t} \frac{J_0\left(\frac{\omega_n r}{R}\right)}{\omega_n^2 J_0[\omega_n]}\right] \qquad (3.23)$$

On peut également traiter le problème par une transformation de Laplace comme dans le cas d'une température de surface imposée.

Il a été montré que la température est de la forme : $\theta(q\,r,p) = A\, I_0(q\,r)$ avec $q = \sqrt{\frac{p}{a}}$

La condition limite en r = R s'écrit : $-\lambda \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = \phi_0$

Soit : $-\lambda \frac{d\theta(q\,R,p)}{dr} = \frac{\phi_0}{p}$ ou : $-\lambda\, q\, A\, I_1(qR) = \frac{\phi_0}{p}$

Et : $A = -\frac{\phi_0}{p} \frac{1}{\lambda\, q\, I_1(q\,R)}$

D'où :

$$\theta(q\,r,p) = -\frac{\phi_0}{p} \frac{I_0(q\,r)}{\lambda\, q\, I_1(q\,R)} \qquad (3.24)$$

La température T(x,t) peut s'en déduire facilement en appliquant une méthode numérique (Invlap ou Stehfest) pour trouver la transformée de Laplace inverse de θ(x,p).

3ème cas : coefficient de transfert imposé

On impose brutalement un échange de chaleur par convection avec un coefficient de transfert h à la surface du cylindre initialement à la température uniforme T_i.

L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(r,0) = T_i & (b) \\ -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = h\left[T(R,t) - T_\infty\right] & (c) \end{cases}$$

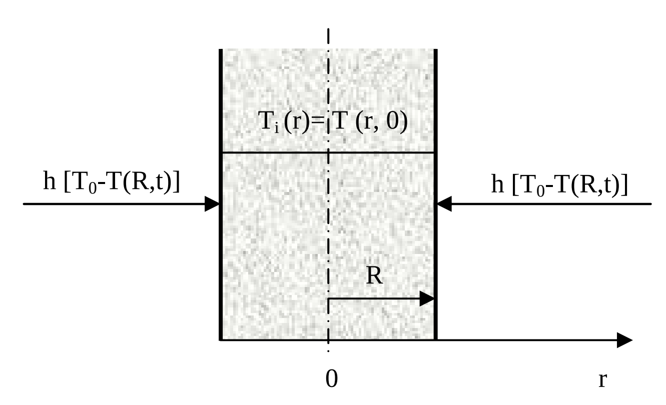


Figure 3.15 : Schématisation d'un cylindre infini avec coefficient de transfert convectif imposé

La solution peut s'écrire :

$$T(r,t) = T_0 + \frac{2\frac{h}{\lambda}(T_i - T_0)}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\omega_n^2 t} \frac{J_0(\omega_n r)}{\left(\frac{h^2}{\lambda^2} + \omega_n^2\right) J_0(\omega_n R)} \qquad (3.25)$$

Où ω_n (n = 1, 2, 3…) sont les valeurs propres, racines de l'équation $\alpha J_0'(\omega r) + \frac{h}{\lambda} J_0(\omega r) = 0$.

On peut également traiter le problème par une transformation de Laplace comme dans le cas d'une température de surface imposée.

Il a été montré que la température est de la forme : $\theta(q\,r,p) = A\,I_0(q\,r)$ avec $q = \sqrt{\frac{p}{a}}$

La condition limite en r = R s'écrit : $-\lambda\,\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = h\,[T(r,t)-T_0] = h\,[T(r,t)-T_i] + h\,[T_i - T_0]$

Soit : $-\lambda\,\frac{d\theta(q\,R,p)}{dr} = h\,\theta(q\,R,p) + \frac{h\,[T_i - T_0]}{p}$ ou : $-\lambda\,q\,A\,I_1(qR) = h\,A\,I_0(q\,R) + \frac{h\,[T_i - T_0]}{p}$

Et : $A = \frac{T_0 - T_i}{p}\,\frac{1}{I_0(q\,R) + \frac{\lambda\,q}{h}\,I_1(q\,R)}$

D'où :

$$\theta(q\,r,p) = \frac{T_0 - T_i}{p}\,\frac{I_0(q\,r)}{I_0(q\,R) + \frac{\lambda\,q}{h}\,I_1(q\,R)} \qquad (3.26)$$

La température T(x,t) peut s'en déduire facilement en appliquant une méthode numérique (Invlap ou Stehfest) pour trouver la transformée de Laplace inverse de θ(x,p).

3.1.3.3 Sphère

1er cas : Température de surface imposée

Nous considérons ici une sphère de rayon R à la température initiale uniforme T_i à laquelle on impose brutalement une température de surface T_0.

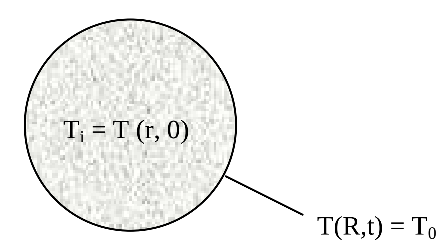


Figure 3.16 : Schématisation d'une sphère avec température de surface imposée

L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (r\,\overline{T})}{\partial r^2} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}$ *(a)* où : $\overline{T} = T - T_0$

Avec les conditions aux limites :
$$\begin{cases} \overline{T}(r,0) = T_i - T_0 & (b) \\ \overline{T}(R,t) = 0 & (c) \end{cases}$$

Effectuons le changement de variable suivant : $U(r,t) = r\,\overline{T}(r,t)$, l'équation *(a)* devient : $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial U}{\partial t}$

Avec les conditions aux limites :
$$\begin{cases} U(r,0) = r\,(T_i - T_0) & (b) \\ U(R,t) = U(-R,t) = 0 & (c) \end{cases}$$

On retrouve le système d'équations de la plaque infinie d'épaisseur 2L (§3.1.3.1) moyennant les changements suivants :

$$\begin{cases} x \rightarrow r - R \\ \overline{T} \rightarrow U \\ T_i - T_0 \rightarrow r(T_i - T_0) \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir le résultat suivant :

$$T(r,t) = T_0 + \frac{2R(T_0 - T_i)}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi\, r}{R}\right) \exp\left(-\frac{a\, n^2 \pi^2 t}{R^2}\right) \qquad (3.27)$$

La température au centre est donnée par la limite de la relation (3.27) quand r tend vers zéro et s'écrit :

$$T(r,t) = T_0 + \frac{R(T_0 - T_i)}{\sqrt{\alpha\,\pi\, t}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 R^2}{4\,\alpha\, t}\right)$$

On peut comme précédemment traiter le problème par une transformation de Laplace :

L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

Avec les conditions aux limites : $\begin{cases} T(r,0) = T_i & (b) \\ T(R,t) = T_0 & (c) \end{cases}$

On effectue le changement de variable suivant : $\overline{T} = T - T_i$

La transformée de Laplace de l'équation (a) s'écrit : $\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dr} = \frac{p}{a}\theta$ *(d)*

On effectue un nouveau changement de variable : $\psi = r\,\theta$

L'équation *(d)* s'écrit alors : $\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{p}{a}\psi = 0$

La solution générale de cette équation s'écrit : $\theta = \frac{\psi}{r} = A\,\frac{\sinh(q\ r)}{r} + B\,\frac{\cosh(q\,r)}{r}$ avec $q = \sqrt{\frac{p}{a}}$

$\frac{\cosh(q\,r)}{r} \to \infty$ quand $r \to 0$ d'où B = 0.

On a la condition limite : $\overline{T}(R,t) = T_0 - T_i$ d'où : $A\,\frac{\sinh(\,q\,R)}{R} = \frac{T_0 - T_i}{p}$

On en déduit : $A = \frac{T_0 - T_i}{p}\,\frac{R}{\sinh(q\,R)}$

Et finalement :

$$\theta(r,p) = \frac{T_0 - T_i}{p}\,\frac{R\,\sinh(q\,r)}{r\,\sinh(q\,R)} \qquad (3.28)$$

La température T(x,t) peut s'en déduire facilement en appliquant une méthode numérique (Invlap ou Stehfest) pour trouver la transformée de Laplace inverse de θ(x,p).

2ème cas : Flux imposé

On considère ici une sphère de rayon R à la température initiale uniforme T_i à laquelle on impose brutalement un flux surfacique ϕ_0.

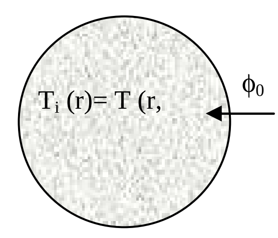


Figure 3.17 : Schématisation d'une sphère avec flux surfacique imposé

L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial r^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}$ *(a)* où : $\overline{T} = T - T_i$

Avec les conditions aux limites : $\begin{cases} \overline{T}(r,0) = T_i - T_0 & (b) \\ \overline{T}(R,t) = 0 & (c) \end{cases}$

On effectue le changement de variable suivant : $U(r,t) = r\,\overline{T}(r,t)$ qui permet de se ramener au cas de la plaque infinie d'épaisseur 2L.

On obtient finalement à :

$$T(r,t) = \frac{3\phi_0 t}{\rho c R} + \frac{\phi_0\left(5r^2 - 3R^2\right)}{10\lambda R} - \frac{2\phi_0 R^2}{\lambda r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\omega_n r}{R}\right)}{\omega_n^{\,2}\sin(\omega_n)}\exp\left(\frac{-\lambda\omega_n^{\,2} t}{R^2}\right) \qquad (3.29)$$

où ω_n (n = 1,2,….) sont les racines positives de l'équation tan (ω) = ω.

On peut également traiter le problème par une transformation de Laplace comme dans le cas d'une température de surface imposée.

Il a été montré que la température est de la forme : $\theta = \frac{\psi}{r} = A\,\frac{\sinh(q\,r)}{r}$ avec $q = \sqrt{\frac{p}{a}}$

La condition limite en r = R s'écrit : $-\lambda\,\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = \phi_0$

Soit : $\lambda\,\frac{d\theta(R,p)}{dr} = \frac{\phi_0}{p}$ ou : $\lambda\,A\,\frac{q\,R\cosh(q\,R) - \sinh(q\,R)}{R^2} = \frac{\phi_0}{p}$

Et : $A = \frac{\phi_0\,R^2}{\lambda\,p}\,\frac{1}{q\,R\cosh(q\,R) - \sinh(q\,R)}$

D'où :

$$\theta(r,p) = \frac{\phi_0\,R^2}{\lambda\,p\,r}\,\frac{\sinh(q\,r)}{q\,R\cosh(q\,R) - \sinh(q\,R)} \qquad (3.30)$$

La température T(x,t) peut s'en déduire facilement en appliquant une méthode numérique (Invlap ou Stehfest) pour trouver la transformée de Laplace inverse de θ(x,p).

3ème cas : Coefficient de transfert par convection imposé

On considère ici une sphère de rayon R à la température initiale uniforme T_i à la surface de laquelle on impose brutalement un échange convectif (avec un coefficient h) avec le milieu ambiant à la température T_0.

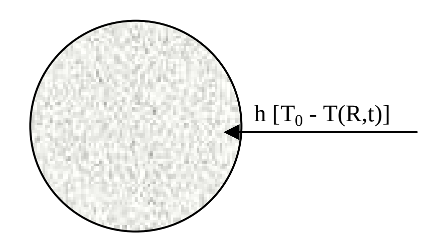


Figure 3.18 : Schématisation d'une sphère avec coefficient convectif imposé

L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial r^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}$ *(a)* où : $\overline{T} = T - T_i$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \overline{T}(r,0) = T_i - T_0 & (b) \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(R,t) = h\left[T(R,t) - T_\infty\right] & (c) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $U(r,t) = r\,\overline{T}(r,t)$ qui permet de se ramener au cas de la plaque infinie d'épaisseur 2L.

On obtient finalement :

$$T(r,t) = T_0 + \frac{2h\left(T_i - T_0\right)}{\lambda R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2\omega_n^{\,2} + \left(\frac{hR}{\lambda} - 1\right)^2}{\omega_n^{\,2}\left[R^2\omega_n^{\,2} + \frac{hR}{\lambda}\left(\frac{hR}{\lambda} - 1\right)\right]}\sin\left(\omega_n R\right)\sin\left(\omega_n r\right) \quad (3.31)$$

Où ω_n (n = 1, 2,….) sont les racines de l'équation $\omega R\cot(\omega R) + \frac{hR}{\lambda} - 1 = 0$

On peut également traiter le problème par une transformation de Laplace comme dans le cas d'une température de surface imposée.

Il a été montré que la température est de la forme : $\theta = \frac{\psi}{r} = A\,\frac{\sinh(q\,r)}{r}$ avec $q = \sqrt{\frac{p}{a}}$

La condition limite en r = R s'écrit : $-\lambda\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = h\left[T(r,t) - T_0\right] = h\left[T(r,t) - T_i\right] + h\left[T_i - T_0\right]$

Soit : $-\lambda A\,\frac{q\,R\cosh(q\,R) - \sinh(q\,R)}{R^2} = h\,\theta(q\,R,p) + \frac{h\left[T_i - T_0\right]}{p} = h\,A\,\frac{\sinh(q\,R)}{R} + \frac{h\left[T_i - T_0\right]}{p}$

Et : $A = \frac{T_i - T_0}{p}\,\frac{R}{\left(\frac{\lambda}{h\,R} - 1\right)\sinh(q\,R) - \frac{\lambda\,q}{h}R\cosh(q\,R)}$

D'où :

$$\theta(r,p) = \frac{T_i - T_0}{p}\,\frac{R}{r}\,\frac{\sinh(q\,r)}{\left(\frac{\lambda}{h\,R} - 1\right)\sinh(q\,R) - \frac{\lambda\,q}{h}R\cosh(q\,R)} \quad (3.32)$$

La température T(x,t) peut s'en déduire facilement en appliquant une méthode numérique (Invlap ou Stehfest) pour trouver la transformée de Laplace inverse de θ(x,p).

3.1.4 Systèmes complexes : méthode des quadripôles

Dans ce paragraphe, on notera :

- θ(x,p) la transformée de Laplace de la température T(x,t).
- Φ(x,p) la transformée de Laplace du flux de chaleur φ(x,t).

On trouvera en annexe A.3.6 un récapitulatif des matrices quadripolaires associées aux systèmes les plus couramment rencontrés dans la pratique.

3.1.4.1 *Ecoulement unidirectionnel dans des murs plans*

Mur simple

On considère le cas d'un transfert de chaleur unidirectionnel dans un mur d'épaisseur e.

La température T(x,t) au sein du mur vérifie l'équation : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ *(a)*

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation *(a)* on obtient : $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} = \dfrac{p}{a}\,\theta$ *(b)* si T(x,0) = 0.

Où θ(x,p) est la transformée de Laplace de la température T(x,t) (cf. annexe A.3.1).

L'équation *(b)* admet une solution de la forme : $\theta(x,p) = k_1(p)\cosh(q\,x) + k_2(p)\sinh(q\,x)$ avec $q^2 = \dfrac{p}{a}$

La transformée de Laplace du flux en un point quelconque du mur s'écrit :

$$\Phi(x,p) = L\left[-\lambda S\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right] = -\lambda S L\left[\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right] = -\lambda S\frac{d\theta}{dx}(x,p) \qquad (c)$$

Cette relation permet d'exprimer Φ(x,p) en fonction de $k_1(p)$, $k_2(p)$ et x :

$$\Phi(x,p) = -\lambda S k_1\, q\sinh(q\,x) - \lambda S k_2\, q\cosh(q\,x) \qquad (d)$$

Les relations (b) et (d) peuvent être écrites en x = 0 et en x = e, on obtient :

$$\theta(0,p) = k_1 \qquad \Phi(0,p) = -\lambda S k_2$$

$$\theta(e,p) = k_1\cosh(q\,e) + k_2\sinh(qe) \qquad \Phi(e,p) = -\lambda S q k_1\sinh(q\,e) - \lambda S q k_2\cosh(q\,e)$$

Il est possible d'éliminer k_1 et k_2 entre ces 4 équations ce qui revient par exemple à exprimer (θ_1, Φ_1) en fonction de (θ_2, Φ_2), on aboutit à :

$$\begin{bmatrix}\theta(0,p)\\ \Phi(0,p)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\cosh(q\,e) & \dfrac{1}{\lambda q S}\sinh(q\,e)\\ \lambda q S\sinh(q\,e) & \cosh(q\,e)\end{bmatrix}}_{M\ =\ \text{matrice quadripolaire}}\begin{bmatrix}\theta(e,p)\\ \Phi(e,p)\end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

On a la propriété : det (M) = 1 ce qui permet d'établir la relation réciproque :

$$\begin{bmatrix}\theta(e,p)\\ \Phi(e,p)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cosh(q\,e) & -\dfrac{1}{\lambda q S}\sinh(q\,e)\\ -\lambda q S\sinh(q\,e) & \cosh(q\,e)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta(0,p)\\ \Phi(0,p)\end{bmatrix}$$

On peut par ailleurs établir une analogie entre la propagation d'un courant en régime sinusoïdal et le transfert thermique unidirectionnel en régime transitoire :

Intensité du courant électrique I ⟶ Flux de chaleur dans l'espace de Laplace Φ(x,p)
Potentiel électrique U ⟶ Température dans l'espace de Laplace θ(x,p)
Impédance électrique Z ⟶ Impédance thermique Z
La loi d'Ohm $U_1 - U_2 = R\,I$ se traduit par : $T_1 - T_2 = R_t\,\varphi$

La loi des noeuds : $\sum I = 0$ se traduit par : $\sum \varphi = 0$

Moyennant ces notations, la relation quadripolaire (3.33) peut être représentée par le schéma électrique équivalent de la figure 3.19.

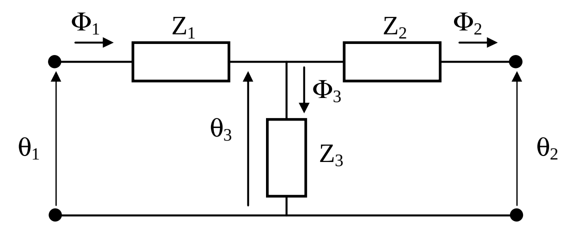


Figure 3.19 : Schéma électrique équivalent à un mur simple en régime variable

Avec dans le cas du mur plan :

$$Z_1 = Z_2 = \frac{\cosh(q\,e) - 1}{\lambda\, S\, q \sinh(q\,e)} \qquad \text{et} \qquad Z_3 = \frac{1}{\lambda\, S\, q \sinh(q\,e)}$$

Mur avec échange convectif

On considère le cas d'un mur échangeant de la chaleur par convection avec un fluide :

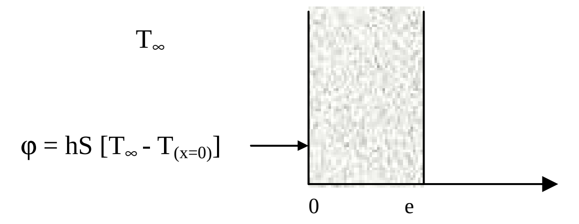


Figure 3.20 : Schématisation d'un mur simple avec transfert convectif

La relation $\varphi = h\,S\left[T_\infty - T_{(x=0)}\right]$ peut aussi s'écrire : $T_\infty = \frac{\varphi}{h\,S} + T_{(x=0)}$ que l'on peut traduire dans l'espace de Laplace par : $\theta_\infty = \theta_{(x=0)} + \frac{\Phi}{h\,S}$ si Φ est la transformée de Laplace du flux φ et θ la transformée de Laplace de la température T.

On peut donc écrire sous forme matricielle quadripolaire :

$$\begin{bmatrix} \theta_\infty \\ \Phi_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/h\,S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{(x=0)} \\ \Phi_{(x=0)} \end{bmatrix} \qquad (3.34)$$

La relation quadripolaire (3.34) peut être représentée par le schéma électrique équivalent de la figure 3.21.

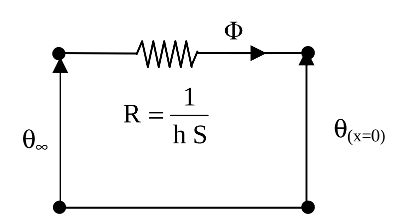


Figure 3.21 : Schéma électrique équivalent à un transfert convectif en régime variable

Résistance de contact entre 2 murs

Considérons maintenant le cas du transfert de chaleur à travers une résistance de contact R à l'interface entre deux milieux solides tel que représenté sur la figure 3.22.

Le flux de chaleur s'écrit $\varphi = \frac{T_{1(x=0)} - T_{2(x=0)}}{R}$ peut aussi s'écrire : $T_{1(x=0)} = R\,\varphi + T_{2(x=0)}$ que l'on peut traduire dans l'espace de Laplace par : $\theta_{1(x=0)} = \theta_{2(x=0)} + R\,\Phi$ si Φ est la transformée de Laplace du flux φ et θ_i la transformée de Laplace de la température T_i.

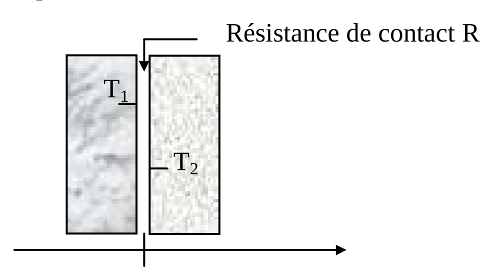


Figure 3.22 : Schéma de deux murs avec résistance de contact

On peut donc écrire sous forme matricielle quadripolaire:

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \Phi_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & R\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_2\\ \Phi_2\end{bmatrix} \qquad (3.35)$$

Cette expression est analogue à la relation (3.34), le schéma électrique équivalent est donc du même type que celui présenté sur la figure 3.21

Mur multicouches avec convection et résistances de contact

Les équations matricielles quadripolaires précédemment établies nous permettent d'écrire :

$$\begin{bmatrix}\theta_{f1}\\ \Phi_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1/h_1S\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & R_{12}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & R_{23}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_3 & B_3\\ C_3 & D_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1/h_2S\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_{f2}\\ \Phi_2\end{bmatrix}$$

avec : $A_i = D_i = \cosh(q_i\, e_i)$; $C_i = \lambda_i\, q_i\, S \sinh(q_i\, e_i)$; $\mathbf{B}_i = \dfrac{\sinh(q_i\, e_i)}{\lambda_i q_i\, S}$ et $q_i = \sqrt{\dfrac{p}{a_i}}$

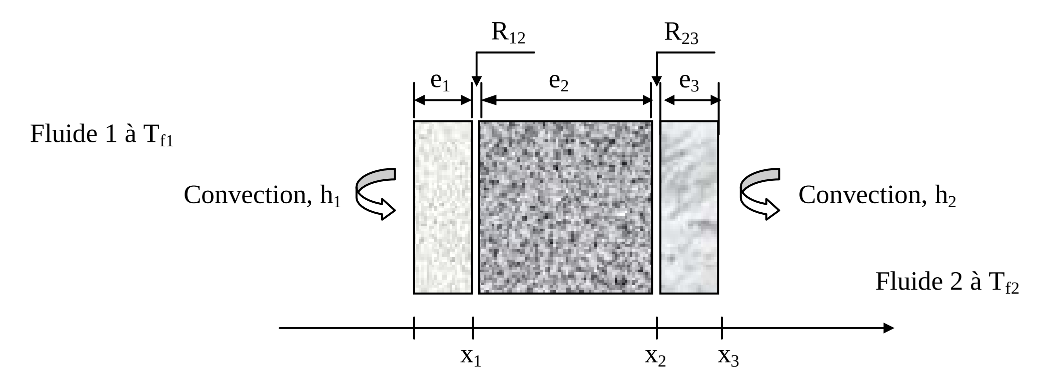


Figure 3.23 : Schéma d'un mur multicouches avec convection et résistances de contact

La description du problème sous forme matricielle permet d'en obtenir une formulation très simple ce qui montre tout l'intérêt de la méthode des quadripôles.

Milieu semi-infini

Il a été démontré au §3.1.2.1 que la température dans l'espace de Laplace d'un milieu semi-infini s'écrit :

$\theta(x,p) = A\, e^{-q\,x}$ où $q = \sqrt{\dfrac{p}{a}}$

On en déduit la valeur de la transformée de Laplace du flux en un point du milieu semi-infini :

$$\Phi(x,p) = -\lambda\, S\,\frac{d\theta}{dx} = \lambda\, A\, q\, S\, e^{-q\,x} = \lambda\, q\, S\,\theta \qquad \text{avec} \qquad q = \sqrt{\frac{p}{a}} = \sqrt{\frac{\rho\, c\, p}{\lambda}}$$

Φ peut donc aussi s'écrire : $\Phi = \lambda\, q\, S\,\theta = \lambda\sqrt{\dfrac{\rho\, c\, p}{\lambda}}\, S\,\theta = \sqrt{\lambda\rho\, c}\, S\sqrt{p}\,\theta = E\, S\sqrt{p}\,\theta$

Où E est l'effusivité thermique.

On pourra donc écrire en tout point d'un milieu semi-infini :

$$\begin{bmatrix}\theta\\ \Phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta\\ E\, S\sqrt{p}\,\theta\end{bmatrix} \qquad (3.36)$$

La relation quadripolaire (3.36) peut être représentée par le schéma électrique équivalent de la figure 3.24.

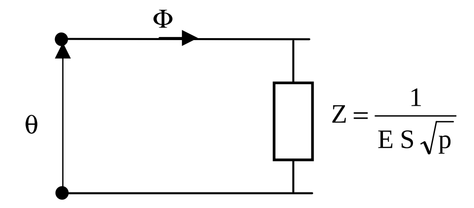


Figure 3.24 : Schéma électrique équivalent à un milieu semi-infini en régime variable

Mur à température uniforme

Dans le cas d'un "système mince" : mur dont l'épaisseur et/ou la conductivité thermique permettent de considérer sa température comme uniforme (Bi < 0,1, cf. §2.3.1), la différence entre le flux de chaleur entrant et le flux de chaleur sortant du système s'écrit simplement :

$\varphi_1 - \varphi_2 = \rho\, c\, V \dfrac{dT}{dt}$ soit en appliquant la transformée de Laplace : $\Phi_1 - \Phi_2 = \rho\, c\, V\, p\, \theta$

Ce qui peut se traduire sous forme quadripolaire par la relation :

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \Phi_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \rho\, c\, V\, p & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_2\\ \Phi_2\end{bmatrix} \qquad (3.37)$$

La relation quadripolaire (3.37) peut être représentée par le schéma électrique équivalent de la figure 3.25.

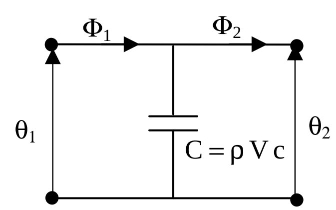


Figure 3.25 : Schéma électrique équivalent à un milieu à température uniforme en régime variable

Exemple d'application : cf. modélisation de la méthode du plan chaud, exercice 16.

3.1.4.2 Ecoulement radial

Cylindre creux

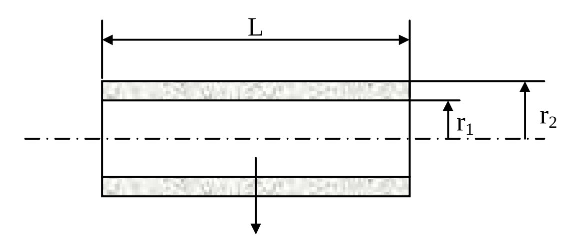


Figure 3.26 : Schéma du cylindre creux

On montre de la même manière qu'au § 3.1.4.1 (Maillet et al, 2000) que les températures et les flux dans l'espace de Laplace peuvent être reliés par une relation quadripolaire :

$$\begin{bmatrix}\theta(r_1,p)\\ \Phi(r_1,p)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta(r_2,p)\\ \Phi(r_2,p)\end{bmatrix}$$

$$A = q\, r_2 \left[K_1(q\, r_2)\, I_0(q\, r_1) + K_0(q\, r_1)\right] I_1(q\, r_2)$$

$$B = \frac{1}{2\pi\lambda L}\left[K_0(q\, r_1) I_0(q\, r_2) - K_0(q\, r_2) I_0(q\, r_1)\right] \qquad (3.38)$$

$$C = 2\pi L\, \rho\, c\, p\, r_1\, r_2 \left[K_1(q\, r_1) I_1(q\, r_2) - K_1(q\, r_2) I_1(q\, r_1)\right]$$

$$D = q\, r_1 \left[K_0(q\, r2)\;\; I_1(q\, r_1) + K_1(q\, r_1) I_0(q\, r_2)\right]$$

I_0, I_1, K_0 et K_1 étant des fonctions de Bessel (cf. Annexe A.2.3). Le déterminant de la matrice quadripolaire est égal à 1.

Cylindre creux semi-infini

Comme dans le cas du mur plan, on montre que l'on peut écrire en tout point d'un cylindre creux semi-infini ($r_2 \to \infty$) (Maillet et al, 2000) :

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 2\pi\lambda L \dfrac{q r_1 K_1(q r_1)}{K_0(q r_1)} \theta \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

La relation quadripolaire (3.39) peut être représentée par le schéma électrique équivalent de la figure 3.27.

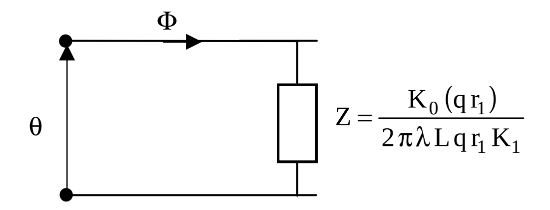


Figure 3.27 : Schéma électrique équivalent à un milieu semi-infini en régime variable

Exemple d'application : cf. modélisation de la méthode du fil chaud, § 7.2.2.

Sphère creuse

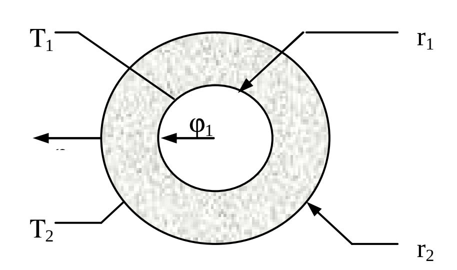


Figure 3.28 : Schéma de la sphère creuse

On montre de la même manière qu'au § 3.1.4.1 (Maillet et al, 2000) que les températures et les flux dans l'espace de Laplace peuvent être reliés par une relation quadripolaire :

$$\begin{bmatrix} \theta(r_1, p) \\ \Phi(r_1, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(r_2, p) \\ \Phi(r_2, p) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Avec :

$$A = \frac{r_2}{r_1}\cosh(p) - \frac{\sinh(p)}{q r_1} \quad ; \quad B = \frac{\sinh(p)}{4\pi\lambda q r_1 r_2} \quad ;$$

$$C = 4\pi\lambda r_2\left[\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\cosh(p) + \left(q r_1 - \frac{1}{q r_2}\sinh(p)\right)\right] \quad ; \quad D = \frac{r_1}{r_2}\cosh(p) + \frac{\sinh(p)}{q r_2}$$

Le déterminant de la matrice quadripolaire est égal à 1.

Sphère creuse semi-infinie

Comme dans le cas du mur plan, on montre que l'on peut écrire en tout point d'une sphère creuse semi-infinie ($r_2 \to \infty$) :

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 4\pi\lambda r_1 (1 + q r_1)\theta \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Le schéma électrique équivalent est identique à celui présenté sur la figure 3.23 avec $Z = \dfrac{1}{4\pi\lambda r_1 (1+q r_1)}$

3.2 Conduction unidirectionnelle en régime variable avec changement d'état

Température constante imposée en surface

Le milieu semi-infini est initialement à la température uniforme T_i en phase 2. On impose brutalement une température de surface T_0 inférieure à la température de changement de phase 2→1.Un changement de phase va se produire tout d'abord à la surface puis se propager vers l'intérieur du milieu semi-infini.

L'équation de la chaleur s'écrit dans les phases 1 et 2 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a_1}\dfrac{\partial T_1}{\partial t} & (a) \quad \text{dans la phase 1 [pour } x < X(t)] \\ \dfrac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a_2}\dfrac{\partial T_2}{\partial t} & (b) \quad \text{dans la phase 2 [pour } x > X(t)] \end{cases}$$

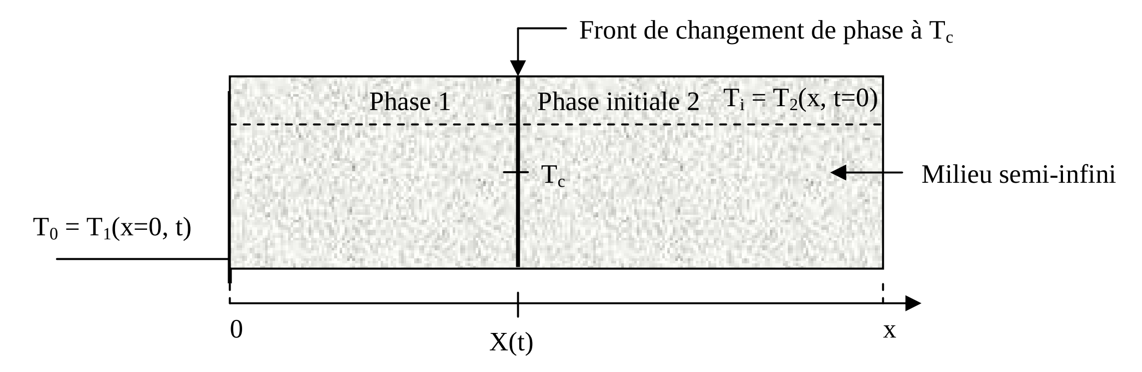


Figure 3.29 : Schéma d'un milieu semi-infini avec changement de phase

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} T_1(x,0) = T_2(x,0) = T_i & (c) \\ T_1(0,t) = T_0 & (d) \\ T_1(X,t) = T_2(X,t) = T_c & (e) \\ \lambda_1 \left(\dfrac{\partial T_1}{\partial x}\right)_X - \lambda_2 \left(\dfrac{\partial T_2}{\partial x}\right)_X = L\,\rho\,\dfrac{dX}{dt} & (f) \end{cases}$$

On cherche la solution sous la forme :

$T_1(x,t) = A\ \mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) + T_0$ pour 0 < x < X(t)

$T_2(x,t) = T_i - B\left[1 - \mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right)\right]$ pour X(t) > x où A et B sont des constantes arbitraires à déterminer

Les solutions proposées vérifient l'équation de la chaleur (cf. §3.4.1.1), les conditions initiales (c) et la condition (a). Il reste à vérifier les conditions (e) et (f) à l'interface x = X(t).

L'équation (e) conduit à :

$$A\ \mathrm{erf}\left(\frac{X(t)}{2\sqrt{a_1 t}}\right) + T_0 = T_i - B\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{X(t)}{2\sqrt{a_2 t}}\right)\right] = T_c$$

Cette relation doit être vérifiée pour toutes les valeurs de t, on en déduit que : $X = k\sqrt{t}$, où k est une constante.

En tenant compte de cette forme de X(t), l'équation (f) permet d'écrire :

$$\frac{\lambda_1 \, A \, e^{\frac{-k^2}{4a_1}}}{\sqrt{\pi a_1}} - \frac{\lambda_2 \, B \, e^{\frac{-k^2}{4a_2}}}{\sqrt{\pi a_2}} = L \frac{\rho k}{2}$$

Avec : $A = \dfrac{T_c - T_0}{\operatorname{erf}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a_1}}\right)}$ et $B = \dfrac{T_i - Tc}{1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a_2}}\right)}$

La position X(t) du front de changement de phase se calcule finalement par :

$$X(t) = k\sqrt{t} \qquad (3.42)$$

Avec k solution de l'équation :

$$\frac{\lambda_1 (T_c - T_0)}{\operatorname{erf}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a_1}}\right)} \exp\left(\frac{-k^2}{4a_1}\right) - \frac{\lambda_2 (T_i - Tc)}{\left[1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a_2}}\right)\right]} \exp\left(\frac{-k^2}{4a_2}\right) = \frac{L \rho k}{2}$$

Et la température dans chaque phase s'écrit :

$$T_1(x,t) = \frac{T_c - T_0}{\operatorname{erf}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a_1}}\right)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) + T_0 \quad ; \quad T_2(x,t) = T_i - \frac{T_i - Tc}{\left[1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a_2}}\right)\right]} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right)\right] \qquad (3.43)$$

On obtient dans le cas de l'eau les valeurs données dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Valeurs de k en fonction de T_i et de T_0 pour de l'eau initialement liquide à T_i

10^4 k		T_0					
		-3	-6	-9	-12	-15	-18
T_i	0	0,9871	1,3876	1,6893	1,9393	2,1559	2,3484
	3	0,8937	1,2919	1,5925	1,8420	2,0582	2,2506
	6	0,8106	1,2040	1,5025	1,7506	1,9661	2,1580
	9	0,7371	1,1235	1,4188	1,6650	1,8792	2,0703
	12	0,6724	1,0500	1,3411	1,5848	1,7974	1,9873
	15	0,6154	0,9829	1,2690	1,5098	1,7203	1,9087
		0,5653	0,9217	1,2023	1,4395	1,6477	1,8344

3.3 Conduction multidirectionnelle en régime variable

3.3.1 Théorème de Von Neuman

Certains problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels peuvent être résolus par combinaison de 2 ou 3 solutions monodimensionnelles. Considérons par exemple le cas d'une barre rectangulaire infinie (longueur très grande devant les côtés $2L_1$ et $2L_2$), elle peut être considérée comme l'intersection de deux plaques infinies d'épaisseurs respectives $2L_1$ et $2L_2$. Le théorème de Von Neumann permet d'affirmer que la température adimensionnelle de cette barre s'exprime comme le produit des températures adimensionnelles des deux plaques infinies dont elle peut être considérée comme étant l'intersection :

$$\left[\frac{T(x,y,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right]_{barre 2L_1 \, x \, 2L_2} = \left[\frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right]_{plaque 2L_1} x \left[\frac{T(y,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right]_{plaque 2L_2} \qquad (3.44)$$

Remarques :

- Il faut vérifier que les conditions initiales et aux limites sont satisfaites sous forme adimensionnelle après décomposition de la géométrie considérée en intersection d'éléments simples.
- Des géométries plus complexes peuvent également se décomposer en intersection d'éléments simples, comme par exemple :
  - Cylindre semi-infini = Cylindre infini $\cap$ Milieu semi-infini
  - Barre rectangulaire semi-infinie = Barre rectangulaire infinie $\cap$ Milieu semi-infini
  - Cylindre hauteur 2L = Cylindre infini $\cap$ Plaque épaisseur 2L…

3.3.2 Transformations intégrales et séparation de variables

Les problèmes de transfert multidirectionnel de la chaleur peuvent dans certains cas être traités comme en unidirectionnel par transformations intégrales et séparation de variables. Nous traiterons simplement ici à titre d'exemple le transfert de chaleur dans un cylindre fini d'épaisseur e et de rayon R, initialement à température uniforme, lorsque l'une de ses faces est soumise à une densité de flux de chaleur uniforme $\phi_0(t)$. Le cylindre échange de la chaleur par convection sur toutes ses faces avec le milieu environnant (cf. figure 3.30).

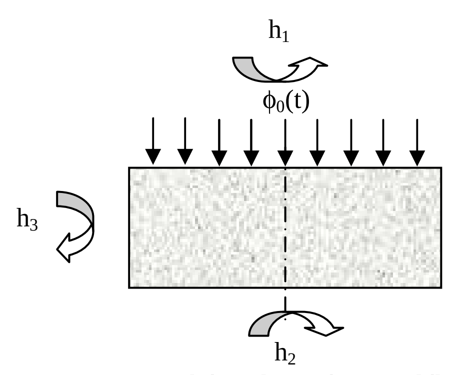


Figure 3.30 : Schéma du système modélisé

Si l'on considère que $\phi_0(t)$ est un Dirac, on retrouve la méthode Flash en 3D. Dans ce cas, $\Phi_0(p) = L[\phi_0(t)] = 1$.

Le problème est à symétrie cylindrique on utilise donc l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T(r,z,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r,z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial t} \qquad (a)$$

La méthode de résolution utilisée est la suivante :

- Transformation de Laplace
- Séparation des variables

Conditions limites et initiale :

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial T(r,0,t)}{\partial z} = h_1\left[T(r,0,t) - T_i\right] - \phi_0(t) & (b) \\ -\lambda \dfrac{\partial T(r,e,t)}{\partial z} = h_2\left[T(r,e,t) - T_i\right] & (c) \\ \dfrac{\partial T(0,z,t)}{\partial r} = 0 & (d) \\ -\lambda \dfrac{\partial T(R,z,t)}{\partial r} = h_3\left[T(R,r,t) - T_i\right] & (e) \\ T(r,z,0) = T_i & (f) \end{cases}$$

On pose $\Delta T(r,z,t) = T(r,z,t) - T_i$ et $L[\Delta T(r,z,t)] = \theta(r,z,p)$

La transformée de Laplace de (a) s'écrit : $\dfrac{\partial^2 \theta(r,z,p)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \theta(r,z,p)}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 \theta(r,z,p)}{\partial z^2} = \dfrac{p}{a}\theta(r,z,p)$

On écrit la température après transformation de Laplace sous la forme suivante : $\theta(r,z,p) = R(r,p)\ Z(z,p)$

$$\frac{\partial^2 R(r,p)Z(z,p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R(r,p)Z(z,p)}{\partial r} + \frac{\partial^2 R(r,p)Z(z,p)}{\partial z^2} = \frac{p}{a} R(r,p)\ Z(z,p)$$

$$\frac{1}{R(r,p)}\left(\frac{\partial^2 R(r,p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R(r,p)}{\partial r}\right) + \frac{1}{Z(z,p)}\frac{\partial^2 Z(z,p)}{\partial z^2} = \frac{p}{a}$$

On en déduit : $\frac{1}{R(r,p)}\left(\frac{\partial^2 R(r,p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R(r,p)}{\partial r}\right) = -\alpha^2$ et : $\frac{1}{Z(z,p)}\frac{\partial^2 Z(z,p)}{\partial z^2} - \gamma^2 = 0$ avec : $\gamma^2 = \frac{p}{a} + \alpha^2$

Les solutions des équations ci-dessus sont :

$R(r,p) = A\,J_0(\alpha r) + B\,Y_0(\alpha r)$

$Z(z,p) = C\,sh(\gamma z) + D\,ch(\gamma z)$

Application des conditions aux limites :

$Y_0(\alpha r) \to -\infty$ lorsque $r \to 0$, or la température doit rester finie donc B=0 et $R(r,p) = A\,J_0(\alpha\, r)$

En r = R : $-\lambda \frac{\partial T(R,z,t)}{\partial r} = h_3(T(R,z,t) - T_e) \Rightarrow -\lambda \frac{\partial R(R,p)}{\partial r} = h_3 R(R,p)$

$\frac{\partial R(r,p)}{\partial r} = -A\alpha J_1(\alpha r)$ donc : $\lambda\, A\, \alpha\, J_1(\alpha\, R) = h_3\, A\, J_0(\alpha\, R)$

On pose : $H_3 = \frac{h_3 R}{\lambda}$ et $\omega = \alpha\, R$,

Les valeurs propres ω_n sont solutions de l'équation transcendante : $\omega\, J_1(\omega) = H_3\ J_0(\omega)$

En z = e : $-\lambda \frac{\partial T(r,e,t)}{\partial z} = h_2(T(r,e,t) - T_e) \Rightarrow -\lambda \frac{\partial Z(e,p)}{\partial z} = h_2 Z(e,p)$

D'où : $-\lambda\left[C\,\gamma\, ch(\gamma e) + D\,\gamma\, sh(\gamma e)\right] = h_2\left[C\, sh(\gamma e) + D\, ch(\gamma e)\right]$ avec : $\gamma^2 = \frac{p}{a} + \alpha^2$ et $\omega = \alpha R$

En posant : $\beta = \gamma\ e$ et $H_2 = \frac{h_2\, e}{\lambda}$

On obtient : $-\left[C\beta\, ch(\beta) + D\beta\, sh(\beta)\right] = H_2\left[C\, sh(\beta) + D\, ch(\beta)\right]$

Or : $\theta(r,z,p) = R(r,p)\ Z(z,p) = A\,J_0(\alpha\, r)\ \left[C\, sh(\gamma z) + D\, ch(\gamma z)\right] = C\,A\,J_0(\alpha\, r)\left[sh(\gamma z) + \frac{D}{C} ch(\gamma z)\right]$

D'où : $\frac{D}{C} = -\frac{H_2\, sh(\beta) + \beta\, ch(\beta)}{-\beta\, sh(\beta) - H_2\, ch(\beta)}$

On pose : $E = A\,C$

$$\theta(r,z,p) = E\,J_0(\alpha\, r)\left[sh(\gamma z) + \frac{H_2\, sh(\beta) + \beta\, ch(\beta)}{-\beta\, sh(\beta) - H_2\, ch(\beta)} ch(\gamma z)\right]$$

$$\theta(r,z,p) = E\,J_0(\alpha\, r).\frac{\left[(-\beta\, sh(\beta) - H_2\, ch(\beta))ch(\gamma z) + (H_2\, sh(\beta) + \beta\, ch(\beta))sh(\gamma z)\right]}{-\beta\, ch(\beta) - H_2\, sh(\beta)}$$

$$\theta(r,z,p) = F\,J_0(\alpha\, r)\left\{\left[-\beta\, sh(\beta) - H_2\, ch(\beta)\right]ch(\gamma z) + \left[H_2\, sh(\beta) + \beta\, ch(\beta)\right]sh(\gamma z)\right\}$$

Après développement et factorisation on obtient une solution particulière. En faisant la somme de n = 1 à l'infini de ces solutions, on obtient la solution générale :

$$\theta(r,z,p) = \sum_{n=1}^{n=\infty} F_n\, J_0(\alpha_n\, r)\left[\beta_n\, ch(\gamma_n\,(e-z)) + H_2\, sh(\gamma_n\,(e-z))\right]$$

En z = 0 : $\lambda \frac{\partial T(r,0,t)}{\partial z} = h_1(T(r,0,t) - T_e) - \phi_0(t)$

Soit : $\lambda \frac{\partial \theta(r,0,p)}{\partial z} = h_1 \theta(r,0,p) - \Phi_0(p)$

$$\lambda \sum_{n=1}^{n=\infty} F_n\ J_0(\alpha_n\ r)\left[-\beta_n\ \gamma_n\ \mathrm{sh}(\gamma_n\ (e-z)) - H_2\ \gamma_n\ \mathrm{ch}(\gamma_n\ (e-z))\right] - \ldots$$

$$h_1 \sum_{n=1}^{n=\infty} F_n\ J_0(\alpha_n\ r)\left[\beta_n\ \mathrm{ch}(\gamma_n\ (e-z)) + H_2\ \mathrm{sh}(\gamma_n\ (e-z))\right] = -\Phi_0(p)$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} F_n\ J_0(\alpha_n\ r)(\lambda\,\beta_n\ \gamma_n\ \mathrm{sh}(\gamma_n\ e) + \lambda\ H_2\ \gamma_n\ \mathrm{ch}(\gamma_n\ e)) + h_1\,\beta_n\ \mathrm{ch}(\gamma_n\ e) + H_2\ h_1\ \mathrm{sh}(\gamma_n\ e) = \Phi_0(p)$$

En posant $H_1 = \dfrac{e\,h_1}{\lambda}$, on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F_n J_0(\alpha_n r)\frac{\lambda}{e}\left[\left(\beta_n^2 + H_2 H_1\right)\mathrm{sh}(\beta_n) + \beta_n (H_2 + H_1)\ \mathrm{ch}(\beta_n)\right] = \Phi_0(p)$

Si l'on pose : $G_n = F_n \dfrac{\lambda}{e}\left[\left(\beta_n^2 + H_2 H_1\right)\mathrm{sh}(\beta_n) + \beta_n (H_2 + H_1)\mathrm{ch}(\beta_n)\right]$

On obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} G_n\ J_0(\alpha_n\ r) = \Phi_0(p)$

L'orthogonalité des fonctions propres permet d'écrire: $\displaystyle\int_0^R J_0(\alpha_n\ r) J_0(\alpha_m\ r)\, r\, dr = 0 \quad \text{si}\ \alpha_n \neq \alpha_m$

Donc $\displaystyle\int_0^R r\, J_0(\alpha_m\ r)dr \sum_{n=1}^{\infty} G_n\ J_0(\alpha_n r) = \int_0^R \Phi_0(p)\ r J_0(\alpha_m r)dr$

D'où : $\displaystyle G_n \int_0^R r J_0^2(\alpha_n r)dr = \int_0^R \Phi_0(p)\, r J_0(\alpha_n r)dr$

$$G_n = \frac{\displaystyle\int_0^R \Phi_0(p)\, r J_0(\alpha_n r)dr}{\displaystyle\int_o^R r\, J_0^2(\alpha_n r)dr} = \frac{\Phi_0(p)\dfrac{1}{\alpha_n} R J_1(\alpha_n R)}{\dfrac{R^2}{2}\left(J_1^2(\alpha_n R) + J_0^2(\alpha_n R)\right)} = \frac{2\,\Phi_0(p)}{\omega_n\left(1 + \dfrac{\omega_n^2}{H_3{}^2}\right) . J_1(\alpha_n R)}$$

On en déduit finalement :

$$\theta(r,z,p) = \sum_{n=1}^{n=\infty} F_n J_0(\alpha_n r)\left[\beta_n \mathrm{ch}(\gamma_n (e-z)) + H_2 \mathrm{sh}(\gamma_n (e-z))\right] \qquad (3.45)$$

où : $$F_n = \frac{2\,\Phi_0(p)\dfrac{e}{\lambda}}{\omega_n\left(1 + \dfrac{\omega_n^2}{H_3^2}\right) J_1(\omega_n)\left[\left(\beta_n^2 + H_2 H_1\right)\mathrm{sh}(\beta_n) + \beta_n\ (H_2 + H_1)\mathrm{ch}(\beta_n)\right]}$$

Les ω_n étant les solutions de l'équation transcendante $J_0(\omega_n) = \dfrac{\omega_n J_1(\omega_n)}{H_3}$ résolue numériquement. Une centaine de termes est suffisante pour calculer θ(r,z,p). On calcule ensuite T(r,z,p) par transformation de Laplace inverse effectuée numériquement.

4 TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT

4.1 Généralités. Définitions

4.1.1 Nature du rayonnement

Tous les corps, quelque soit leur état : solide, liquide ou gazeux, émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Cette émission d'énergie s'effectue au détriment de l'énergie interne du corps émetteur.

Le rayonnement se propage de manière rectiligne à la vitesse de la lumière, il est constitué de radiations de différentes longueurs d'onde comme l'a démontré l'expérience de William Herschel :

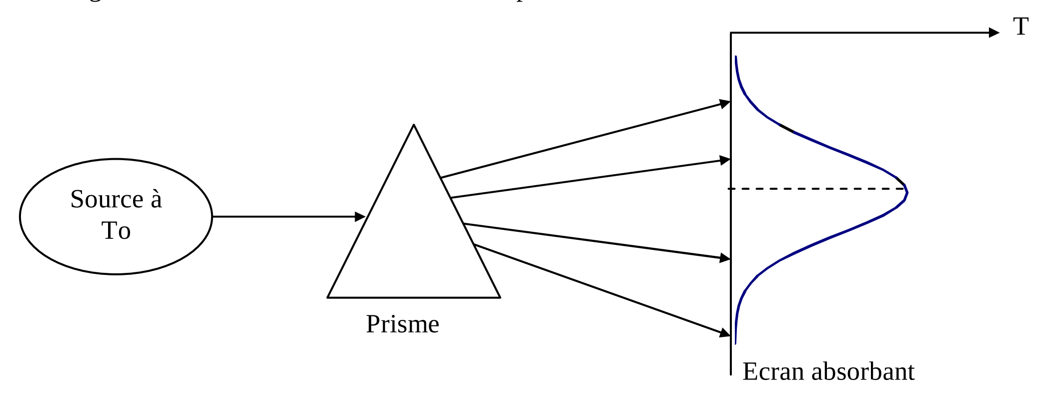


Figure 4.1 : Principe de l'expérience de William Herschel

En passant à travers un prisme, les radiations sont plus ou moins déviées selon leur longueur d'onde. On envoie donc les radiations émises par une source à la température T_0 sur un prisme et on projette le faisceau dévié sur un écran absorbant (noirci), on obtient ainsi la décomposition du rayonnement total incident en un spectre de radiations monochromatiques.

Si l'on déplace le long de l'écran un thermomètre, on mesure la température T_e caractérisant l'énergie reçue par l'écran dans chaque longueur d'onde. En construisant la courbe $T_e = f(\lambda)$, on obtient la répartition spectrale de l'énergie rayonnée pour la température T_0 de la source. On constate alors que:

- L'énergie émise est maximale pour une certaine longueur d'onde λ_m variable avec T_0.
- L'énergie n'est émise que sur un intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ de longueur d'onde caractérisant le rayonnement thermique.

On trouvera représentés sur la figure 4.2 les différents types d'ondes électromagnétiques et leurs longueurs d'ondes correspondantes. On retiendra que le rayonnement thermique émis par les corps se situe entre 0,1 et 100 µm. On notera par ailleurs que le rayonnement est perçu par l'homme :

- Par l'oeil : pour $0{,}38\ \mu m < \lambda < 0{,}78\ \mu m$ rayonnement visible.
- Par la peau : pour $0{,}78\ \mu m < \lambda < 314\ \mu m$ rayonnement IR.

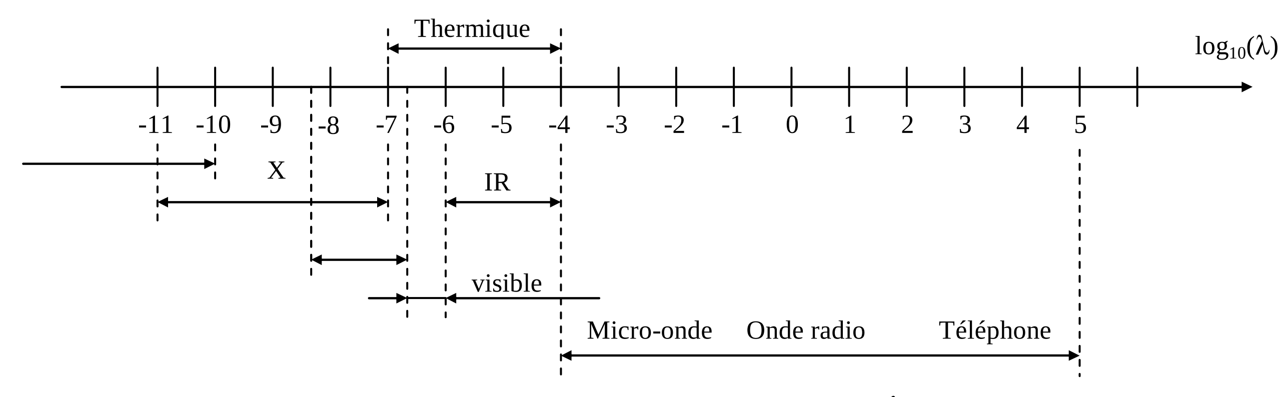


Figure 4.2 : Spectre des ondes électromagnétiques (λ en m)

4.1.2 Définitions

4.1.2.1 Classification

Les grandeurs physiques seront distinguées selon :
- La composition spectrale du rayonnement
  - Si la grandeur est relative à l'ensemble du spectre elle est dite totale.
  - Si elle concerne un intervalle spectral étroit $d\lambda$ autour d'une longueur d'onde λ elle est dite monochromatique : G_λ.
- La distribution spatiale du rayonnement
  - Si la grandeur est relative à l'ensemble des directions de l'espace, elle est dite hémisphérique.
  - Si elle caractérise une direction donnée de propagation, elle est dite directionnelle : G_x.

4.1.2.2 Définitions relatives aux sources

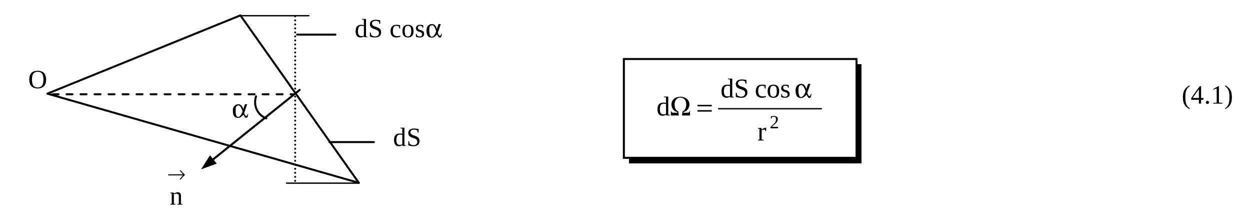
Flux
- On appelle flux d'une source S la puissance rayonnée notée φ par S dans tout l'espace qui l'entoure, sur toutes les longueurs d'onde. Le flux φ s'exprime en W.
- Le flux envoyé par un élément de surface dS dans un angle solide élémentaire $d\Omega$ est noté $d^2\varphi$
- Le flux envoyé dans tout l'espace par une surface élémentaire dS est noté $d\varphi$.
- Le flux envoyé par une surface S dans l'angle solide $d\Omega$ entourant la direction Ox est noté $d\varphi_x$.

Nous avons donc les relations suivantes : $d\varphi = \int_\Omega d^2\varphi$ et $\varphi = \int_S d\varphi = \int_\Omega d\varphi_x$

Rappel sur les angles solides élémentaires :

L'angle solide sous lequel depuis un point O on voit une surface S est par définition l'aire de la surface intersection de la sphère de rayon unité et du cône de sommet O s'appuyant sur le contour de la surface S.

L'angle solide élémentaire $d\Omega$ sous lequel est vu d'un point O le contour d'une petite surface dS (assimilée à une surface plane) peut être calculé par :



$$d\Omega = \frac{dS \cos\alpha}{r^2} \tag{4.1}$$

Figure 4.3 : Schéma de l'angle solide

Propriétés :

- La valeur d'un angle solide Ω est comprise entre 0 et 4π
- Pour un cône de demi-angle au sommet α : $\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha)$

Emittance énergétique

- Monochromatique :
  Un élément de surface dS émet un certain flux d'énergie par rayonnement dans toutes les directions du ½ espace. Ce flux est réparti sur un intervalle de longueurs d'ondes. Si l'on considère le flux d'énergie $d\varphi_\lambda^{\lambda+d\lambda}$ émis entre les deux longueurs d'ondes λ et $\lambda+d\lambda$, on définit l'émittance monochromatique d'une source à la température T par :

$$M_{\lambda T} = \frac{d\varphi_\lambda^{\lambda+d\lambda}}{dS\ d\lambda} \tag{4.2}$$

- Totale :
  C'est la densité de flux de chaleur émise par rayonnement par dS sur tout le spectre des longueurs d'ondes. Elle n'est plus fonction que de la température T et de la nature de la source :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T}\, d\lambda \quad = \frac{d\varphi}{dS} \qquad (4.3)$$

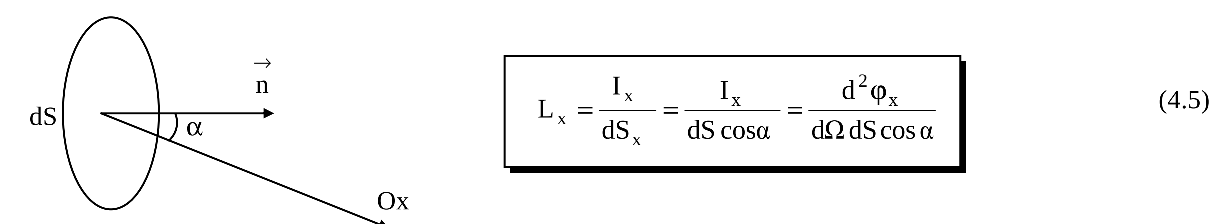
Intensité énergétique dans une direction

On appelle intensité énergétique I_x le flux par unité d'angle solide émis par une surface dS dans un angle solide $d\Omega$ entourant la direction Ox :

$$I_x = \frac{d\varphi_x}{d\Omega} \qquad (4.4)$$

Luminance énergétique dans une direction

Soit α l'angle fait par la normale $\vec{n}$ à la surface émettrice S avec la direction Ox. La projection de dS sur le plan perpendiculaire à Ox définit la surface émettrice apparente dS_x = dS cos α. L'intensité énergétique élémentaire dI_x dans la direction Ox par unité de surface émettrice apparente dS_x s'appelle la luminance énergétique Lx. En partant de la relation (4.4) :



$$L_x = \frac{I_x}{dS_x} = \frac{I_x}{dS \cos\alpha} = \frac{d^2\varphi_x}{d\Omega\, dS \cos\alpha} \qquad (4.5)$$

Figure 4.4 : Schéma de définition des angles

Application : Formule de Bougouer

On déduit des définitions précédentes l'expression du flux $d^2\varphi_x$ envoyé par un élément dS_i de luminance L_x sur un autre élément dS_k :

$$d^2\varphi_x = I_x\, d\Omega = L_x\, dS_i \cos\alpha_i\, d\Omega$$

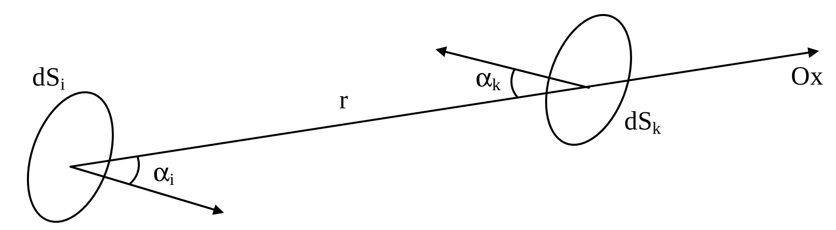


Figure 4.5 : Schéma de définition des angles dans la formule de Bougouer

Où : $d\Omega$ est l'angle solide sous lequel on voit la surface dS_k depuis la surface dS_i donc $d\Omega = \frac{dS_k \cos\alpha_k}{r^2}$

D'où la formule de Bougouer :

$$d^2\varphi_x = L_{ix}\, \frac{dS_i \cos\alpha_i\, dS_k \cos\alpha_k}{r^2} \qquad (4.6)$$

4.1.2.3 Définitions relatives à un récepteur

Eclairement

C'est l'homologue de l'émittance pour une source. L'éclairement est le flux reçu par unité de surface réceptrice, en provenance de l'ensemble des directions.

Réception du rayonnement par un solide

Quand un rayon incident d'énergie φ_λ frappe un corps à la température T, un partie $\varphi_\lambda\ \rho_{\lambda T}$ de l'énergie incidente est réfléchie par la surface S, une autre partie $\varphi_\lambda\ \alpha_{\lambda T}$ est absorbée par le corps qui s'échauffe et le reste $\varphi_\lambda\ \tau_{\lambda T}$ est transmis et continue son chemin :

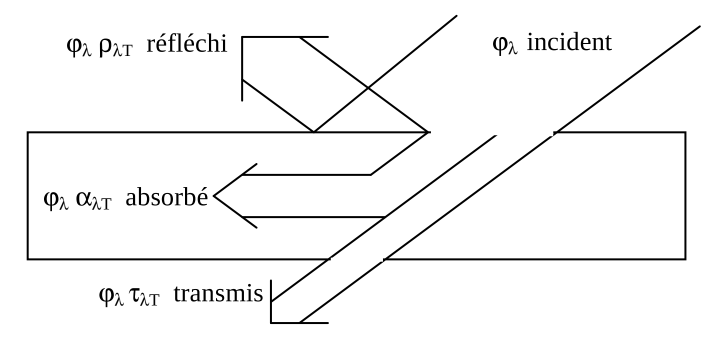


Figure 4.6 : Schématisation de la répartition d'un flux incident de rayonnement sur un solide

On a évidemment : $\varphi_\lambda = \varphi_\lambda\ \rho_{\lambda T} + \varphi_\lambda\ \alpha_{\lambda T} + \varphi_\lambda\ \tau_{\lambda T}$ d'où : $\rho_{\lambda T} + \alpha_{\lambda T} + \tau_{\lambda T} = 1$

On définit ainsi les pouvoirs monochromatiques réfléchissant $\rho_{\lambda T}$, absorbant $\alpha_{\lambda T}$ et filtrant $\tau_{\lambda T}$ qui sont fonction de la nature du corps, de son épaisseur, de sa température T, de la longueur d'onde λ du rayonnement incident et de l'angle d'incidence.

Si l'on considère l'énergie incidente sur tout le spectre des longueurs d'onde, on obtient les pouvoirs réfléchissants ρ_T , absorbant α_T et filtrant τ_T totaux. Les valeurs de ρ_T, α_T et τ_T de certains corps sont donnés en annexe A.4.1.

4.1.2.4 Corps noir, corps gris

Corps noir

C'est un corps qui absorbe toutes les radiations qu'il reçoit indépendamment de son épaisseur, de sa température, de l'angle d'incidence et de la longueur d'onde du rayonnement incident, il est défini par : $\alpha_{\lambda T} = 1$. Une surface enduite de noir de fumée est approximativement un corps noir.

Propriétés du corps noir :

- Tous les corps noirs rayonnent de la même manière.
- Le corps noir rayonne plus que le corps non noir à la même température.

Corps gris

Un corps gris est un corps dont le pouvoir absorbant $\alpha_{\lambda T}$ est indépendant de la longueur d'onde λ du rayonnement qu'il reçoit. Il est défini par : $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$.

En général, on considère les corps solides comme des corps gris par intervalle et on utilise un pouvoir absorbant moyen vis-à-vis du rayonnement émis pour $\lambda < 3\ \mu m$ (rayonnement émis par des corps à haute température comme le Soleil) et un pouvoir absorbant moyen vis-à-vis du rayonnement émis pour $\lambda > 3\ \mu m$ (rayonnement émis par les corps à faible température : atmosphère, absorbeur solaire,...). On pourra à titre d'exemple considérer les valeurs suivantes pour la peinture blanche :

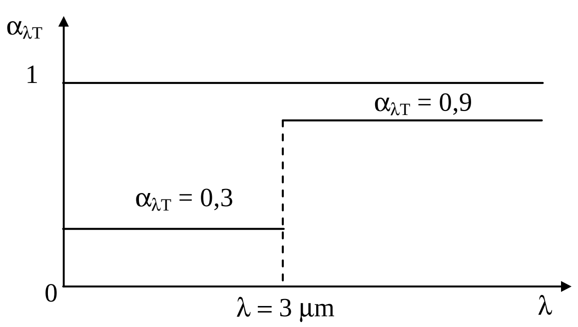


Figure 4.7 : Représentation simplifiée du pouvoir absorbant monochromatique de la peinture blanche.

4.2 Lois du rayonnement

4.2.1 Loi de Lambert

Une source est isotrope si la luminance est indépendante de la direction : $L_x = L$

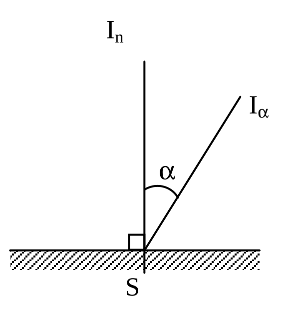


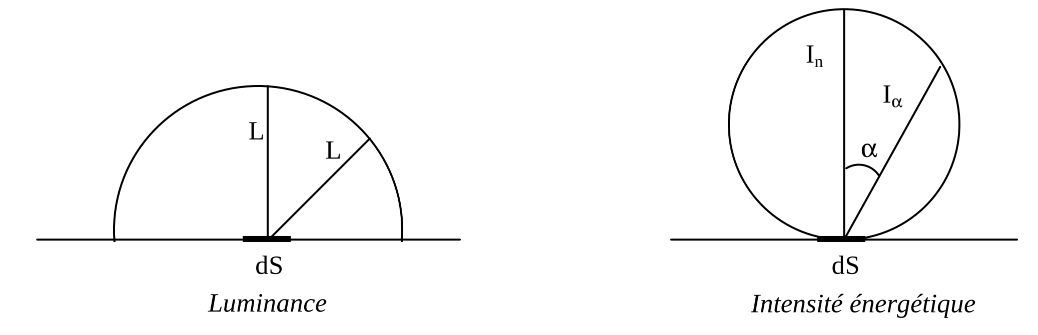
Figure 4.8 : Schématisation de l'intensité énergétique

Or $L_x = \dfrac{I_x}{dS_x} = \dfrac{I_x}{dS\cos\alpha}$

De l'égalité $L_x = L$ on déduit la loi de Lambert pour une source isotrope :

$$\frac{dI_x}{dS} = L\cos\alpha \qquad (4.7)$$

Ainsi l'indicatrice d'émission est une sphère tangente en O à la surface émettrice lorsque celle-ci suit la loi de Lambert :



Luminance *Intensité énergétique*

Figure 4.9 : Schématisation de la luminance et de l'intensité énergétique d'une source isotrope

Remarque : Comme pour un cône de demi-angle au sommet α : $\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha)$ et $d\Omega = 2\pi\sin\alpha\, d\alpha$,

lorsqu'un corps suit la loi de Lambert : $M = \dfrac{d\varphi}{dS} = L \displaystyle\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2} \cos\alpha\, d\Omega = 2\pi L \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2} \cos\alpha \sin\alpha\, d\alpha$

Soit :

$$M = \pi L \qquad (4.8)$$

4.2.2 Lois physiques

4.2.2.1 Loi de Kirchoff

A une température T donnée et pour une longueur d'onde λ donnée, le rapport $\dfrac{M_{\lambda T}}{\alpha_{\lambda T}}$ est le même pour tous les corps.

Pour le corps noir : $\alpha_{\lambda T} = 1$, le rapport $\dfrac{M_{\lambda T}}{\alpha_{\lambda T}}$ est donc égal à $Mo_{\lambda T}$ en appelant $Mo_{\lambda T}$ l'émittance monochromatique du corps noir, donc :

$$M_{\lambda T} = \alpha_{\lambda T}\, Mo_{\lambda T} \qquad (4.9)$$

L'émittance monochromatique de tout corps est égale au produit de son pouvoir absorbant monochromatique par l'émittance monochromatique du corps noir à la même température, d'où l'intérêt de connaître le rayonnement émis par le corps noir.

Cas des corps gris : loi de Kirchoff généralisée

Dans le cas du corps gris, on peut généraliser cette loi ce qui facilite les applications. En effet pour un corps gris $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$, donc :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T}\, d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \alpha_{\lambda T}\, Mo_{\lambda T}\, d\lambda = \alpha_T \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} Mo_{\lambda T}\, d\lambda$$

En appelant Mo_T l'émittance totale du corps noir à la température T, nous obtenons pour un corps gris :

$$M_T = \alpha_T\, Mo_T \qquad (4.10)$$

L'émittance totale M_T d'un corps gris à la température T est égal au produit de son pouvoir absorbant α_T par l'émittance totale Mo_T du corps noir à la même température.

4.2.2.2 Rayonnement du corps noir

Emittance monochromatique

Elle est donnée par la loi de Planck :

$$Mo_{\lambda T} = \frac{C_1\, \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} \qquad (4.11)$$

Avec : $C_1 = 3{,}742.10^{-16}$ W.m^{-2}
$C_2 = 1{,}4385.10^{-2}$ m.K

La loi de Planck permet de tracer les courbes isothermes représentant les variations de $Mo_{\lambda T}$ en fonction de la longueur d'onde pour diverses températures :

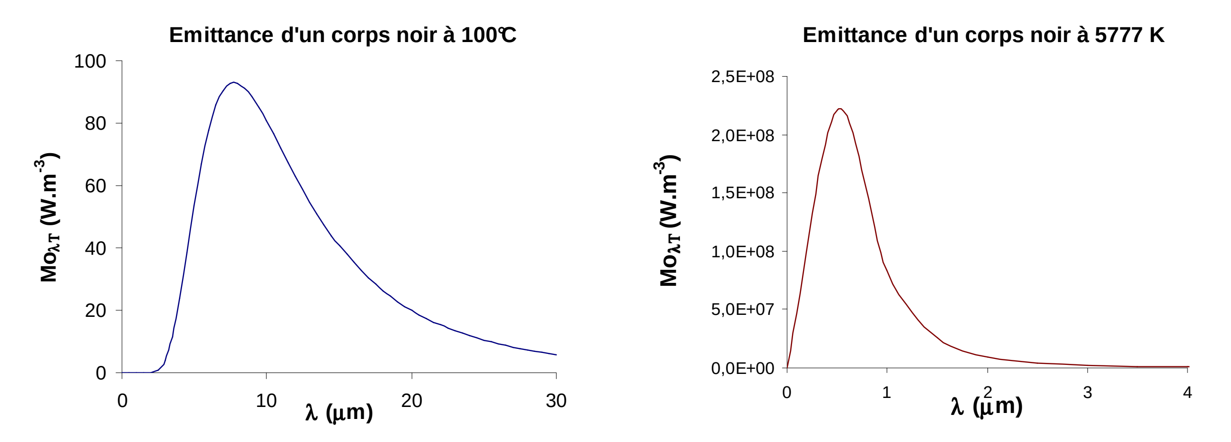


Figure 4.10 : Emittance monochromatique d'un corps noir à deux températures différentes

Remarques :

- La longueur d'onde λ_M pour laquelle l'émission est maximale varie avec la température de la source :

$$\lambda_M = \frac{2{,}897.10^{-3}}{T} \qquad (4.12) \qquad \text{et} \qquad Mo_{\lambda_M T} = 0{,}410 \left(\frac{T}{10}\right)^5 \qquad (4.13)$$

Avec T : Température (K)

Pour le Soleil (T≈ 5777 K), 90% de l'énergie est émise entre 0,31 et 2,5 μm, le maximum étant situé dans le spectre visible. Par contre, un corps noir à 373 K (100°C) a son émission maximale vers λ = 8 μm dans l'IR.

Emittance totale Mo_T

L'intégration de la formule de Planck pour toutes les longueurs d'onde donne l'émittance totale Mo_T du corps noir qui n'est plus fonction que de la température T , on obtient la loi de Stefan-Boltzmann :

$$Mo_T = \sigma T^4 \tag{4.14}$$

avec $\sigma = 5{,}675.10^{-8}$ W.m^{-2}.**K**$^{-4}$

Dans les calculs on écrira souvent : $M_{0T} = 5{,}675\left(\frac{T}{100}\right)^4$

Fraction de l'émittance dans un intervalle donné de longueurs d'onde $[\lambda_1, \lambda_2]$

C'est la fraction du flux émis par l'unité de surface du corps noir à la température T entre les longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 :

$$F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Mo_{\lambda T}\, d\lambda}{\int_0^{\infty} Mo_{\lambda T}\, d\lambda} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Mo_{\lambda T}\, d\lambda}{\sigma T^4} = \frac{\int_0^{\lambda_2} Mo_{\lambda T}\, d\lambda - \int_0^{\lambda_1} Mo_{\lambda T}\, d\lambda}{\sigma T^4} = \frac{\int_0^{\lambda_2} Mo_{\lambda T}\, d\lambda}{\sigma T^4} - \frac{\int_0^{\lambda_1} Mo_{\lambda T}\, d\lambda}{\sigma T^4}$$

Ce qui peut également s'écrire : $F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T}$; Calculons $F_{0-\lambda T}$ à T constant :

$$F_{0-\lambda T} = \frac{1}{\sigma T^4}\int_0^{\lambda} \frac{C_1\,\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1}\, d\lambda = \frac{1}{\sigma}\int_0^{\lambda} \frac{C_1(\lambda T)^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1}\, T d\lambda = \frac{1}{\sigma}\int_0^{\lambda} \frac{C_1(\lambda T)^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1}\, d(\lambda T)$$

Nous constatons que $F_{0-\lambda T}$ ne dépend que du produit λT. Il suffit donc de dresser une fois pour toutes une table à une entrée unique λT donnant $F_{0-\lambda T}$ et de l'utiliser pour le calcul de $F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T}$. Le tableau des valeurs est donné en annexe A.4.2.

4.2.2.3 Rayonnement des corps non noirs

Facteur d'émission ou émissivité

On définit les propriétés émissives des corps réels par rapport aux propriétés émissives du corps noir dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde et on les caractérise à l'aide de coefficients appelés facteurs d'émission ou émissivités. Ces coefficients monochromatiques ou totaux sont définis par :

$$\varepsilon_{\lambda T} = \frac{M_{\lambda T}}{Mo_{\lambda T}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_T = \frac{M_T}{Mo_T} \tag{4.15}$$

D'après la loi de Kirchoff, on montre que :

$$\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_{\lambda T} \tag{4.16}$$

Cas des corps gris

Ils sont caractérisés par $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$ soit d'après ce qui précède : $\varepsilon_{\lambda T} = \varepsilon_T$

Or : $M_T = \varepsilon_T \, Mo_T$, nous en déduisons l'émittance du corps gris à la température T :

$$\boxed{M_T = \varepsilon_T \, \sigma T^4} \quad (4.17)$$

4.3 Rayonnement réciproque de plusieurs surfaces

Hypothèses :

- *Les surfaces considérées sont supposées homogènes, opaques, isothermes et grises.*
- *Les éclairement sont supposés homogènes et les réflexions diffuses ;*

4.3.1 Radiosité et flux net perdu

Le rayonnement qui quitte une surface S_i est la somme de son émission propre et de la réflexion d'une partie du rayonnement incident sur cette surface. On appelle radiosité, que l'on note J_i, l'émittance apparente de la surface S_i donc :

$$\boxed{J_i = \varepsilon_i \, \sigma {T_i}^4 + (1-\varepsilon_i) E_i} \quad (4.18)$$

Avec E_i : Eclairement de la surface S_i ($W.m^{-2}$)

Considérons maintenant la surface S_i choisie parmi n surfaces isothermes et homogènes qui délimitent un volume :

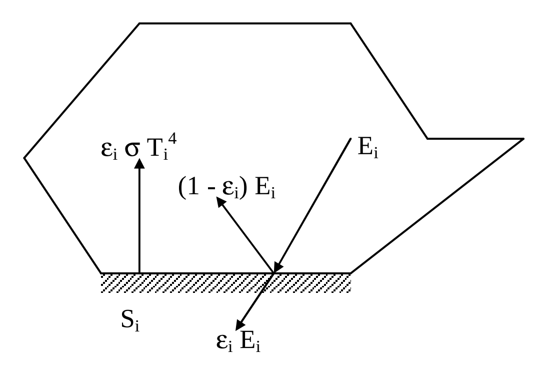


Figure 4.11 : Schématisation des flux de rayonnement sur une surface

La densité d'énergie nette perdue par rayonnement par S_i s'écrit : $\phi_{i_{net}} = \varepsilon_i \, \sigma {T_i}^4 - \varepsilon_i \, E_i$

En introduisant, d'après (4.18), la radiosité J_i par : $E_i = \dfrac{1}{1-\varepsilon_i}\left(J_i - \varepsilon_i \, \sigma {T_i}^4\right)$, nous obtenons :

$$\boxed{\phi_{i_{net}} = \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\left(\sigma {T_i}^4 - J_i\right) = \varepsilon_i \left(\sigma {T_i}^4 - E_i\right) = J_i - E_i} \quad (4.19)$$

4.3.2 Facteur de forme géométrique

On considère une surface S_i qui sur toute son étendue a une émission apparente $\varphi_i = S_i \, J_i$.

La surface S_i est environnée par un nombre n de surfaces et φ_i est envoyé sur toutes ces surfaces (la surface S_i peut également rayonner vers elle-même si elle est concave). Le flux apparent φ_i peut donc se décomposer de la manière suivante :

$$\varphi_i = \varphi_{i\to 1} + \varphi_{i\to 2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_{i\to i} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_{i\to n}$$

Calculons $\varphi_{i \to k}$ qui est la part du flux quittant S_i qui atteint S_k :

D'après la formule de Bougouer, le flux $d^2\varphi_{i \to k}$ envoyé par la surface élémentaire dS_i vers la surface élémentaire dS_k s'écrit :

$$d^2\varphi_{i \to k} = L_i \frac{dS_i \cos\alpha_i \, dS_k \cos\alpha_k}{r^2}$$

avec $L_i = \dfrac{J_i}{\pi}$ comme la surface grise S_i suit la loi de Lambert.

Nous en déduisons : $\varphi_{i \to k} = J_i \int_{S_i}\int_{S_k} \dfrac{\cos\alpha_i \cos\alpha_k}{\pi r^2} dS_i \, dS_k$

Le facteur de forme géométrique f_{ik} de la surface S_i par rapport à la surface S_k est alors défini par la relation :

$$S_i f_{ik} = \int_{S_i}\int_{S_k} \frac{\cos\alpha_i \cos\alpha_k}{\pi r^2} dS_i \, dS_k \qquad (4.20)$$

Il ne dépend que de la géométrie et de la disposition relative des surfaces S_i et S_k. Des formules donnent sa valeur pour les cas de figure les plus courants (cf. annexe A.4.3). Le flux $\varphi_{i \to k}$ peut alors s'écrire simplement :

$$\varphi_{i \to k} = J_i f_{ik} S_i$$

Le facteur de forme géométrique f_{ik} s'interprète simplement comme la fraction du flux total émis en apparence par S_i ($\varphi_i = J_i S_i$) qui atteint la surface S_j.

Remarques :

- Le 2ème membre de la formule (4.20) de définition de f_{ik} est symétrique en i et k, on en déduit la relation de réciprocité des facteurs de forme :

$$S_i f_{ik} = S_k f_{ki} \qquad (4.21)$$

- La relation $\varphi_i = \varphi_{i \to 1} + \varphi_{i \to 2} + ... + \varphi_{i \to i} + ... + \varphi_{i \to n}$ peut s'écrire :

$$\varphi_i = J_i f_{i1} S_i + J_i f_{i2} S_i + ... + J_i f_{in} S_i = J_i S_i (f_{i1} + f_{i2} + ... + f_{in}) \quad \text{or} \quad \varphi_i = S_i J_i$$

D'où :

$$f_{i1} + f_{i2} + ... + f_{in} = 1 \qquad (4.22)$$

Ces deux relations sont utiles pour la détermination des facteurs de formes de plusieurs surfaces en présence.

4.3.3 Calcul des flux

Le flux $\varphi_{\to i}$ reçu par la surface S_i s'écrit : $\varphi_{\to i} = E_i S_i = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k \to i}$ or $\varphi_{k \to i} = J_k S_k f_{ki}$

D'où : $E_i S_i = \sum_{k=1}^{n} J_k S_k f_{ki} = \sum_{k=1}^{n} J_k S_i f_{ik}$ d'après (4.21).

En reportant cette expression dans (4.18), nous obtenons : $J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1-\varepsilon_i) \sum_{k=1}^{n} J_k f_{ik}$

Soit encore : $\sigma T_i^4 = \dfrac{J_i}{\varepsilon_i} - \dfrac{1}{\varepsilon_i} \sum_{k=1}^{n} (1-\varepsilon_i) J_k f_{ik}$

En utilisant le symbole de Kronecker, nous pouvons écrire : $J_i = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \, J_k$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\delta_{ik} - (1-\varepsilon_i) f_{ik}\right] J_k = \varepsilon_i \, \sigma T_i^4 \qquad (4.23)$$

On écrit cette relation pour toutes les surfaces S_i dont on connaît les températures. Pour celles dont on connaît plutôt la densité de flux net perdue $\phi_{i_{net}}$ on utilise la relation : $\phi_{i_{net}} = J_i - E_i = J_i - \sum_{k=1}^{n} f_{ik} \, J_k$

Qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\delta_{ik} - f_{ik}\right) J_k = \phi_{i_{net}} \qquad (4.24)$$

Méthode de résolution

Si l'on connaît p températures et (n-p) densités de flux nets $\phi_{i_{net}}$, on écrit p fois l'équation (4.23) et (n-p) fois l'équation (4.24), on obtient ainsi un système linéaire de n équations à n inconnues : J_1, J_2, ...J_p,, T_{p+1}, ...T_n.

La résolution de ce système permet de calculer les (n-p) températures et les p radiosités inconnues. Les p densités de flux nets inconnues se calculent ensuite par la relation : $\phi_{i_{net}} = \dfrac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i} \left(\sigma T_i^4 - J_i\right)$

Remarque :

Si une surface est noire (ε_i = 1), la relation (4. 23) ne peut pas être utilisée. Nous avons alors simplement dans ce cas la relation : $J_i = \sigma T_i^4$ et l'on résout le système des (n-1) équations restantes.

Exemple d'application : Cas de deux plans parallèles infinis

On suppose que les températures T_1 et T_2 ainsi que les émissivités ε_1 et ε_2 des deux surfaces S_1 et S_2 sont connues, on cherche à déterminer le flux net perdu par chacune de ces surfaces.

Nous avons $f_{11} = f_{22} = 0$ car les surfaces S_1 et S_2 sont planes et ne peuvent pas rayonner vers elles-mêmes.

Nous en déduisons $f_{12} = 1$ et $f_{21} = 1$ en appliquant la relation $\sum_{k=1}^{n} f_{ik} = 1$ pour i = 1 et pour i = 2.

La relation (4.23) s'écrit alors de la manière suivante pour i = 1 et i = 2 :

$$\begin{cases} J_1 - (1-\varepsilon_1) J_2 = \varepsilon_1 \, \sigma T_1^4 \\ -(1-\varepsilon_2) J_1 + J_2 = \varepsilon_2 \, \sigma T_2^4 \end{cases}$$

D'où : $J_1 = \sigma \dfrac{\varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 (1-\varepsilon_1) T_2^4}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}$

$$\phi_{1_{net}} = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \left(\sigma T_1^4 - J_1\right) = \sigma T_1^4 \left(\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) - \sigma T_2^4 \; \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_2 (1-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

Et $\phi_{1_{net}} = -\phi_{2_{nnet}} = \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right) \dfrac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}$

Soit finalement :

$$\phi_{1_{net}} = -\phi_{2_{nnet}} = \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1} \qquad (4.25)$$

4.3.4 Analogie électrique

<u>Flux net perdu par une surface</u>

Nous avons montré que : $\phi_{i\,net} = \dfrac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\left(\sigma T_i^4 - J_i\right)$ ce qui peut encore s'écrire : $\varphi_{i_{net}} = \dfrac{\sigma T_i^4 - J_i}{\dfrac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i\, S_i}}$

Par analogie, cette relation peut être représentée par le schéma électrique équivalent suivant :

$\sigma\, T_i^4$ —— $\varphi_{i_{net}}$, $\dfrac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i\, S_i}$ —— J_i

Figure 4.12 : Schéma électrique équivalent du flux radiatif perdu par une surface

On notera que cette résistance thermique de rayonnement ne dépend que des propriétés physiques de la surface S_i et qu'elle est nulle pour un corps noir.

<u>Flux net échangé entre plusieurs surfaces</u>

Le flux net perdu par la surface S_i dans ses échanges radiatifs avec l'ensemble des surfaces environnantes s'écrit d'après la relation (4.19) : $\varphi_{i_{net}} = \left(J_i - E_i\right) S_i$

Le flux $\varphi_i = J_i\, S_i$ quittant la surface S_i peut se décomposer de la manière suivante :

$$\varphi_i = \varphi_{i\to 1} + \varphi_{i\to 2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_{i\to n} = \sum_{j=1}^{n} J_i\, S_i\, f_{ij}$$

L'éclairement E_i reçu par la surface S_i peut se décomposer de la manière suivante :

$$E_i\, S_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{j\to i} = \sum_{j=1}^{n} J_j\, S_j\, f_{ji}$$

Le flux net perdu par S_i peut donc s'écrire :

$$\varphi_{i_{net}} = \sum_{j=1}^{n} J_i\, S_i\, f_{ij} - J_j\, S_j\, f_{ji} = \sum_{j=1}^{n} S_i\, f_{ij}\left(J_i - J_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{net\; i\to j}$$

Le flux net échangé entre les surfaces S_i et S_j s'écrit donc : $\varphi_{net_{i\to j}} = \left(J_i - J_j\right) S_i\, f_{ij} = \dfrac{J_i - J_j}{\dfrac{1}{S_i\, f_{ij}}}$

Cet échange radiatif peut être représenté par le schéma électrique équivalent suivant :

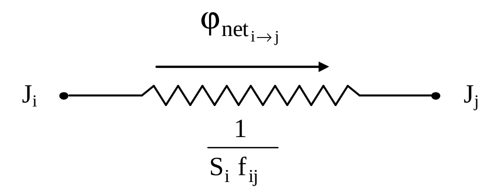


Figure 4.13 : Schéma électrique équivalent du flux radiatif échangé entre deux surfaces

On notera que cette résistance thermique de rayonnement est purement géométrique et qu'elle ne dépend pas des propriétés physiques des surfaces S_i et S_j.

<u>Application : Echange entre deux surfaces grises</u>

Si les deux surfaces S_1 et S_2 sont seules en présence, le flux net $\varphi_{1_{net}}$ perdu par S_1 est égal au flux net $\varphi_{2_{net}}$ gagné par S_2 . Ce flux est encore égal au flux net $\varphi_{net_{1\to 2}}$ échangé entre S_1 et S_2, nous avons donc les égalités :

$$\varphi_{1_{net}} = \varphi_{net_{1\to 2}} = -\varphi_{2_{net}}$$

Soit $$\varphi_{1_{net}} = \frac{\sigma T_1^4 - J_1}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{S_1 f_{12}}} = \frac{J_2 - \sigma T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}}$$

Cet échange radiatif peut être représenté par le schéma électrique équivalent suivant :

$$\sigma T_1^4 \;\xrightarrow{\;\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1}\;}\; J_1 \;\xrightarrow[\varphi_{1_{net}}]{\;\frac{1}{S_1 f_{12}}\;}\; J_2 \;\xrightarrow{\;\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}\;}\; \sigma T_2^4$$

Figure 4.14 : Schéma électrique équivalent du flux radiatif net échangé entre deux surfaces

D'où $$\varphi_{1_{net}} = -\varphi_{2_{net}} = \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 f_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} \qquad (4.26)$$

Utilisation des schémas analogiques

Dans les systèmes simples, il est plus rapide d'utiliser la technique des schémas analogiques que celle du système linéaire. Lorsqu'on a établi le schéma analogique, on calcule les différentes résistances du circuit puis on résout par les techniques habituelles utilisées en électricité : loi d'association des résistances en série et en parallèle, loi des noeuds,...

Exemple d'application : Cas d'une surface S_1 convexe complètement entourée par une surface S_2

La surface S_1 étant convexe elle ne peut pas rayonner vers elle-même donc : $f_{11} = 0$
La relation $f_{11} + f_{12} = 1$ nous permet de déduire : $f_{12} = 1$

La relation (4.26) s'écrit alors :

$$\varphi_{1_{net}} = -\varphi_{2_{net}} = \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{\varepsilon_2 S_2} - \frac{1}{S_2}}$$

D'où : $$\varphi_{1_{net}} = -\varphi_{2_{net}} = \sigma \frac{S_1\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \qquad (4.27)$$

Cas particulier où la surface S_1 est « petite » devant la surface S_2 :

Nous avons dans ce cas : $\frac{S_1}{S_2} \approx 0$ et la relation (4.27) s'écrit alors :

$$\varphi_{1_{net}} = -\varphi_{2_{net}} = \sigma \varepsilon_1 S_1 \left(T_1^4 - T_2^4\right) \qquad (4.28)$$

Vue de la surface S_1 (« petit corps »), la surface S_2 se comporte alors comme un corps noir.

4.4 Emission et absorption des gaz

4.4.1 Spectre d'émission des gaz

Beaucoup de gaz et de mélanges de gaz sont transparents pour T < 3000 K : O_2, N_2, air sec...

Par contre, les gaz hétéropolaires di-atomiques ou tri-atomiques (CO_2, SO_2 , CH_4...) et des vapeurs d'hydrocarbures ou d'alcools présentent des bandes d'émission et d'absorption de largeur plus ou moins grande dans le spectre, le gaz restant transparent entre ces bandes. Les spectres d'émission sont de plus différents selon la température du gaz.

Le CO_2 et la vapeur d'eau sont importants en pratique :

- Présents en grande quantité dans les gaz de combustion, leur rayonnement est parfois essentiel dans les échanges de chaleur entre les flammes, les gaz chauds et les charges à réchauffer.
- Présents dans l'atmosphère, le flux qu'ils envoient vers la Terre joue un rôle important dans son bilan thermique :
    - Les refroidissements nocturnes importants observés en saison sèche s'expliquent par l'abaissement du rayonnement émis par l'atmosphère du fait de la faible présence de vapeur d'eau dans l'air.
    - L'augmentation de la teneur en CO_2 dans l'atmosphère du fait des émissions industrielles et automobiles augmente le rayonnement émis par l'atmosphère vers la Terre et contribue au réchauffement de la Terre (effet de serre).

4.4.2 Echange thermique entre un gaz et une paroi

Cas particulier

Traitons le cas d'une masse de gaz hémisphérique et d'une paroi plane de petites dimensions placée au centre de la base de l'hémisphère :

Figure 4.15 : Schématisation du cas considéré

Soient T_p et T_g les températures de la paroi et du gaz et R le rayon de l'hémisphère.

Le gaz envoie sur la paroi un rayonnement dont la densité de flux a pour valeur : $\sigma\,\varepsilon_g\,T_g^{\,4}$, ε_g étant le facteur total d'émission de la couche de gaz d'épaisseur R à la température T_g. ε_g a la même valeur dans toutes les directions car la couche de gaz a la même épaisseur dans toutes les directions du fait de sa forme hémisphérique.

La densité de flux absorbé par la paroi est : $\varepsilon_p\,\sigma\,\varepsilon_g\,T_g^{\,4}$, ε_p étant le facteur total d'absorption de la paroi.

La paroi émet par ailleurs un rayonnement d'une densité de flux égale à : $\sigma\,\varepsilon_p\,T_p^{\,4}$

Au total, la paroi reçoit la densité de flux net :

$$\phi_{p_{net}} = \varepsilon_p\,\sigma\left(\varepsilon_g\,T_g^{\,4} - T_p^{\,4}\right) \quad (4.29)$$

Cas général

Dans le cas particulier que nous venons de traiter, tous les trajets aboutissant à la paroi ont la même longueur donc ε_g est le même dans toutes les directions. Il n'en n'est pas ainsi dans le cas général. Par exemple, dans le cas d'une paroi sphérique de diamètre D enfermant une masse gazeuse, les trajets aboutissants à la paroi ont une longueur comprise entre 0 et D. Le calcul de la densité de flux envoyée par le gaz sur la paroi nécessite donc une intégration par rapport à l'angle d'incidence.

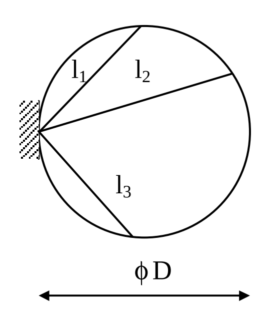


Figure 4.16 : Schématisation du transfert radiatif dans une sphère gazeuse

On trouve par exemple dans ce cas que la densité de flux est égale à celle que l'on obtiendrait avec une hémisphère de rayon équivalent $R = \frac{2}{3}\,D$

D'une manière plus générale, on trouve qu'une bonne approximation du rayon de l'hémisphère équivalent peut être calculée par :

$$R = \frac{4\,V}{S} \qquad (4.30)$$

Des valeurs plus précises sont données dans le tableau de l'annexe A.4.4.

<u>Echange thermique entre deux parois séparées par un gaz</u>

Considérons un gaz séparant deux surfaces S_1 et S_2 supposées planes, parallèles et noires, à des températures différentes T_1 et T_2 . On admettra que la masse de gaz est à la température uniforme T_g et qu'elle a une épaisseur constante L.

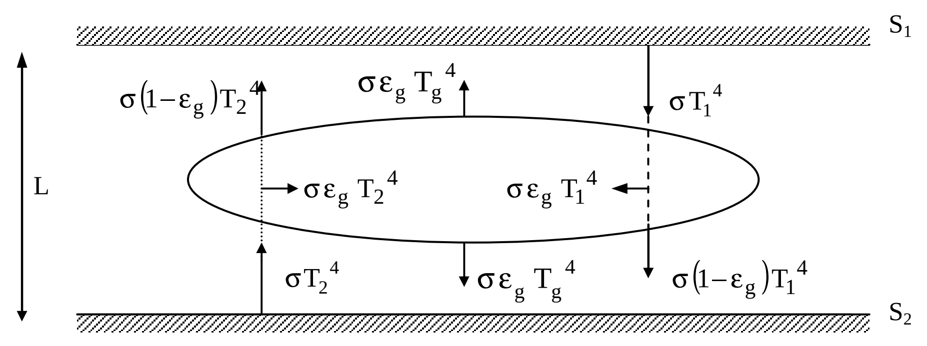


Figure 4.17 : Schématisation des flux radiatifs entre deux parois séparées par un gaz

La température T_g du gaz peut être calculée en fonction de T_1 et de T_2 en écrivant que le flux de chaleur absorbé par la couche gazeuse est égal au flux qu'elle rayonne vers les deux parois :

$$2\,\sigma\,\varepsilon_g\,T_g^{\,4} = \varepsilon_g\,\sigma T_1^{\,4} + \varepsilon_g\,\sigma T_2^{\,4}$$

D'où :
$$T_g^{\,4} = \frac{T_1^{\,4} + T_2^{\,4}}{2}$$

La densité de flux qui passe de la surface S_1 à la surface S_2 s'écrit : $\phi_{1\to 2} = \sigma T_1^{\,4}\left(1-\varepsilon_g\right) + \sigma\,\varepsilon_g\,T_g^{\,4}$

D'où :
$$\phi_{1net} = -\phi_{2net} = \phi_{1\to 2} - \sigma T_2^{\,4} = \sigma\left(T_1^{\,4} - T_2^{\,4}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_g}{2}\right) \qquad (4.31)$$

5 TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

5.1 Rappels sur l'analyse dimensionnelle

5.1.1 Dimensions fondamentales

On peut exprimer les grandeurs physiques en fonction d'un nombre limité de dimensions fondamentales.

Exemples : Vitesse : $L \, . \, T^{-1}$; viscosité dynamique : $M \, . \, L^{-1}.T^{-1}$; force : $M.L.T^{-2}$

Sur ces exemples on voit que le nombre de dimensions fondamentales est de 3 : Masse M, Longueur L, Temps T.

Ces trois dimensions fondamentales ne sont pas toujours suffisantes. Pour les problèmes de transfert de chaleur, il est nécessaire d'ajouter une 4ème dimension : la température θ et, lorsque l'échange d'énergie entre grandeurs mécaniques et grandeurs thermiques ne sera pas mesurable, on ajoutera la quantité de chaleur Q qui sera considérée comme une 5ème dimension.

Remarque : Q, homogène à un travail qui s'exprime en fonction des dimensions fondamentales M, L et T par $Q = M.L.T^{-2}$ n'est pas une vraie dimension fondamentale.

La méthode d'analyse dimensionnelle, qui repose sur le principe de l'homogénéité dimensionnelle des termes d'une équation, est connue sous le nom de théorème de Vaschy-Buckingam ou théorème des groupements π.

5.1.2 Principe de la méthode

Si 1'on peut représenter mathématiquement une loi physique en exprimant une variable physique G_1 en fonction d'un certain nombre d'autres variable physiques indépendantes G_2, ..., G_n, c'est à dire si $G_1 = f(G_2, G_3, ..., G_n)$ ou encore $f(G_1, G_2, .., G_n) = 0$, le problème peut être simplifié de la manière suivante :

- On écrit pour chaque variable G_i, l'équation dimension en fonction des dimensions fondamentales. On dispose alors de n équations qui ont nécessité p dimensions fondamentales pour caractériser toutes les grandeurs physiques.
- On prélève p de ces n équations que l'on considère comme équations de base. Bien que le choix des équations prélevées soit arbitraire, il faut toutefois que chaque dimension fondamentale apparaisse au moins une fois sur l'ensemble des p équations.
- Les (n-p) équations restantes se présentent alors sous forme de (n-p) rapports sans dimensions appelés groupements π qui sont des "grandeurs réduites". On obtient alors une équation réduite :

$$g(\pi_1, \pi_2, ... \pi_{n-p}) = 0$$

Un groupement π est le rapport d'une équation dimension d'une grandeur physique n'appartenant pas à l'ensemble des équations de base au produit des équations de base, chacune d'elle étant portée à une certaine puissance :

$$\pi_i = \frac{[G_i]}{[G_1]^{a_i} \, [G_2]^{b_i} \, ... [G_p]^{e_i}}$$

Pour chaque dimension fondamentale M, L, T, θ, Q figurant au dénominateur, on fait la somme des exposants que l'on identifie avec l'exposant de la même dimension figurant dans l'équation dimension de la grandeur physique du numérateur. On obtient ainsi un système linéaire de p équations dont la résolution permet de déterminer les p exposants des équations de base du dénominateur.

Il suffit alors d'écrire le rapport π en fonction des grandeurs physiques attachées aux équations dimensions de départ.

5.1.3 Exemple d'application

Considérons un fluide en circulation forcée dans une canalisation cylindrique pour lequel on se propose de déterminer le coefficient de convection h relatif au transfert de chaleur fluide-paroi qui correspond à une convection forcée :

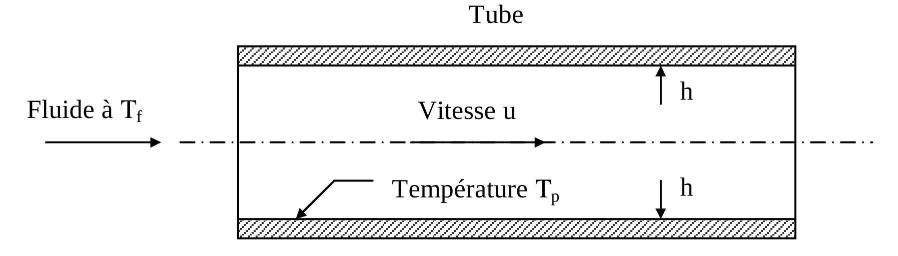


Figure 5.1 : Schéma de la configuration étudiée

Détermination des grandeurs physiques :

Il faut déterminer tous les paramètres dont dépend la densité de flux de chaleur ϕ (liée à h par $\phi = h\,\Delta T$), ce sont ici :

- Les caractéristiques du fluide :
  - λ coefficient de conductibilité thermique
  - c_p chaleur massique
  - ρ masse volumique
  - μ viscosité dynamique
- Les caractéristiques de l'écoulement
  - u vitesse moyenne du fluide
- La géométrie de la surface d'échange
  - D diamètre de la conduite
- L'écart de température paroi-fluide ΔT

$$\text{d'où : } f(\lambda, c_p, \rho, \mu, u, D, \Delta T, \phi) = 0$$

Equation dimension de chaque grandeur :

Il faut ensuite écrire l'équation aux dimensions fondamentales M, L, T, θ, Q de chacune des grandeurs, ce qui s'écrit ici :

λ :	$Q.\,T^{-1}.L^{-1}.\theta^{-1}$
c_p :	$Q.M^{-1}.\theta^{-1}$
ρ :	$M.L^{-3}$
μ :	$M.T^{-1}.L^{-1}$
u :	$L.T^{-1}$
D :	L
T :	θ
ϕ :	$Q.T^{-1}.L^{-2}$

Détermination des groupements π :

Il faut maintenant choisir 5 équations de base (Toutes les dimensions fondamentales ont été utilisées) de façon à ce que les 5 dimensions fondamentales figurent au moins une fois dans l'ensemble des équations.

Prenons par exemple : λ, ρ, u, D, ΔT, il reste ϕ, c_p et μ.

On écrit alors les 3 rapports sans dimension correspondants à ces variables sous la forme :

$$\pi_1 = \frac{\varphi}{T^{a_1}\ \lambda^{b_1}\rho^{c_1}\,D^{d_1}\,u^{e_1}} \quad ; \quad \pi_2 = \frac{c_p}{T^{a_2}\ \lambda^{b_2}\rho^{c_2}\,D^{d_2}\,u^{e_2}} \quad ; \quad \pi_3 = \frac{\mu}{T^{a_3}\ \lambda^{b_3}\rho^{c_3}\,D^{d_3}\,u^{e_3}}$$

Pour chaque rapport π, on remplace les grandeurs physiques par leurs équations dimensions ce qui donne par exemple pour π_1 :

$$[\pi_1] = \frac{Q\,T^{-1}\,L^{-2}}{\theta^{a1}\,(Q\,T^{-1}\,L^{-1}\,\theta^{-1})^{b1}\,(M\,L^{-3})^{c1}\,L^{d1}\,(L\,T^{-1})^{e1}}$$

Pour chaque dimension fondamentale, on identifie les exposants de puissance entre numérateur et dénominateur relatifs à une même dimension ce qui conduit au système :

(Q) : $1 = b_1$
(T) : $-1 = -b_1 - c_1$
(L) : $-2 = -b_1 - 3c_1 + d_1 + e_1$
(θ) : $0 = a1 - b1$
(M) : $0 = c_1$

Le rapport π_1 s'écrit donc $\pi_1 = \dfrac{\phi\,D}{\Delta T\,\lambda}$

Ce qui avec $\phi = h\,\Delta\theta$ peut encore s'écrire :

$$\pi_1 = \frac{h\,D}{\lambda}$$

On obtient de la même manière :

$$\pi_2 = \frac{\rho\,u\,D\,c_p}{\lambda} \quad \text{et} \quad \pi_3 = \frac{\mu}{\rho\,D\,u}$$

Le théorème de Vaschy-Buckingam nous permet d'affirmer que la relation :

$$f\,(\lambda, c_p, \rho, \mu, u, D, \Delta T, \phi) = 0$$

entre 8 variables peut s'exprimer à l'aide des trois nombres sans dimension π_1, π_2 et π_3 sous la forme :

$$f\,(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad \text{ou} \quad \pi_1 = f(\pi_1, \pi_2).$$

Signification physique de ces groupements :

- $\pi_1 = \dfrac{h\,D}{\lambda}$ est le nombre de Nusselt, il peut aussi s'écrire : $Nu = \dfrac{\frac{D}{\lambda}}{\frac{1}{h}}$

  C'est donc le rapport de la résistance thermique de conduction par la résistance thermique de convection. Il est d'autant plus élevé que la convection est prédominante sur la conduction. Il caractérise le type de transfert de chaleur.

- $\pi_3 = \dfrac{\mu}{\rho\,D\,u} = \dfrac{1}{Re}$, c'est l'inverse du nombre de Reynolds qui caractérise le régime d'écoulement dans la canalisation.

- $\pi_2 = \dfrac{\rho\,u\,D\,c_p}{\lambda}$, c'est le nombre de Peclet On petit aussi 1'écrire : $Pe = \dfrac{\rho\,u\,D}{\mu} \cdot \dfrac{c_p\,\mu}{\lambda}$ et faire apparaître un nouveau nombre adimensionnel : $Pr = \dfrac{c_p\,\mu}{\lambda}$ appelé nombre de Prandtl. Ce nombre est calculable pour un fluide donné indépendamment des conditions expérimentales (il ne dépend que de la température) et caractérise l'influence de la nature du fluide sur le transfert de chaleur par convection.

On préfère donc chercher une relation sous la forme :

$$\boxed{Nu = f\,(Re, Pr)} \qquad (5.1)$$

5.1.4 Avantages de l'utilisation des grandeurs réduites

Ils concernent essentiellement la représentation, la comparaison et la recherche des résultats expérimentaux :

- La représentation des résultats expérimentaux est simplifiée on pourra avoir une courbe reliant 2 variables ou une abaque reliant 3 variables réduites au lieu d'une relation liant (3 + p) paramètres.
- La comparaison des résultats expérimentaux est aussi très rapide et aisée, quel que soit le chercheur, même si le système d'unité utilisé est différent puisque les grandeurs réduites sont sans dimension.
- La recherche des résultats expérimentaux est facilitée et ordonnée : s'il suffit de tracer une courbe entre deux variables réduites, c'est qu'il suffit d'effectuer une seule série d'expériences.

Remarque :
Il faut toutefois bien comprendre que la méthode de l'analyse dimensionnelle qui fournit les grandeurs réduites ne donne pas la forme de la relation qui les lie, la recherche de cette relation fait l'objet du dépouillement des résultats expérimentaux.

Quelques groupements sans dimensions

Groupement	
$Re = \frac{\rho u D}{\mu}$	Nombre de Reynolds
$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$	Nombre de Prandtl
$Nu = \frac{h D}{\lambda}$	Nombre de Nusselt
$Pe = \frac{\rho u D c_p}{\lambda}$	Nombre de Peclet
$Ma = \frac{h}{\rho u c_p}$	Nombre de Margoulis
$Gr = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2}$	Nombre de Grashof
$Ra = \frac{c_p \beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\lambda \mu}$	Nombre de Rayleigh

5.2 Convection sans changement d'état

5.2.1 Généralités. Définitions

Les transferts de chaleur qui s'effectuent simultanément avec des transferts de masse sont dits transferts de chaleur par convection. Ce mode d'échange de chaleur existe au sein des milieux fluides dans lesquels il est généralement prépondérant.

Convection naturelle et forcée

Selon la nature du mécanisme qui provoque le mouvement du fluide on distingue :
- La convection libre ou naturelle : le fluide est mis en mouvement sous le seul effet des différences de masse volumique résultant des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (la pesanteur).
- La convection forcée : le mouvement du fluide est induit par une cause indépendante des différences de température (pompe, ventilateur,...).

L'étude du transfert de chaleur par convection permet de déterminer les échanges de chaleur se produisant entre un fluide et une paroi.

Régime d'écoulement

Compte tenu du lien entre le transfert de masse et le transfert de chaleur, il est nécessaire de prendre en compte le régime d'écoulement. Considérons à titre d'exemple l'écoulement d'un fluide dans une conduite :

- En régime laminaire, l'écoulement s'effectue par couches pratiquement indépendantes.

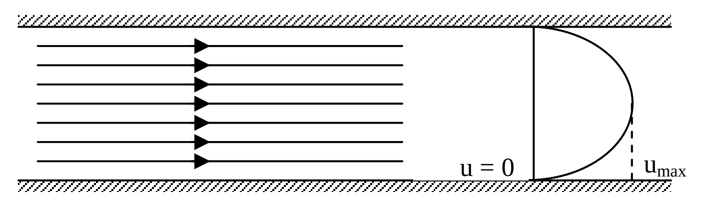


Figure 5.2 : Schématisation d'un écoulement laminaire

Entre deux filets fluides adjacents les échanges de chaleur s'effectuent donc :
- Par conduction uniquement si l'on considère une direction normale aux filets fluides.
- Par convection et conduction (négligeable) si l'on considère une direction non normale aux filets fluides.

- En régime turbulent, l'écoulement n'est pas unidirectionnel :

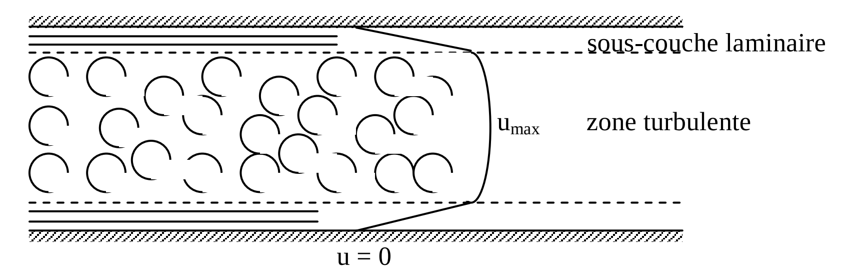


Figure 5.3 : Schématisation d'un écoulement turbulent

L'échange de chaleur dans la zone turbulente s'effectue par convection et conduction dans toutes les directions. On vérifie que la conduction moléculaire est généralement négligeable par rapport à la convection et à la « diffusion turbulente » (mélange du fluide dû à l'agitation turbulente) en dehors de la sous-couche laminaire.

5.2.2 Expression du flux de chaleur

Analogie de Reynolds

De même qu'au niveau moléculaire on explique la viscosité des gaz par la transmission des quantités de mouvement des molécules lors des chocs intermoléculaires, on explique la transmission de la chaleur par la transmission d'énergie cinétique lors de ces mêmes chocs.

Cette liaison intime des phénomènes de viscosité et de transfert de chaleur conduit à l'analogie de Reynolds : dans un écoulement fluide avec transfert de chaleur, le profil des vitesses et le profil des températures sont liés par une relation de similitude schématisée sur la figure 5.4. Cette similitude sera démontrée plus loin dans le cas d'un écoulement sur une plaque plane chauffée.

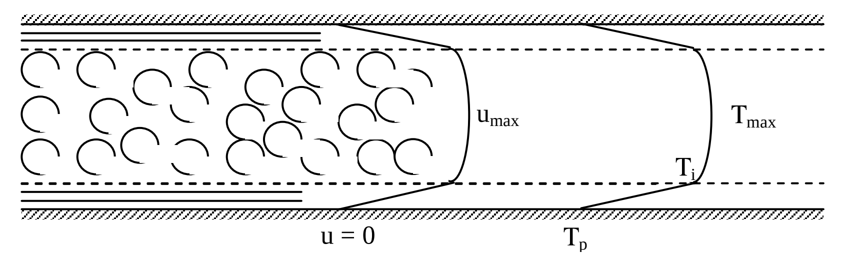


Figure 5.4 : Représentation de l'analogie de Reynolds dans le cas d'un écoulement turbulent dans un tube

Couches limites dynamique et thermique

Quel que soit le régime d'écoulement, il demeure une couche limite dynamique dans laquelle l'écoulement est laminaire et dont l'épaisseur est d'autant plus réduite que le nombre de Reynolds est grand. L'épaisseur de

cette couche limite varie en fonction de nombreux paramètres : nature du fluide, température, rugosité de la paroi, ...

L'analogie de Reynolds montre que le gradient thermique est particulièrement important au voisinage de la paroi, dans une couche limite thermique qui se développe de manière analogue à la couche limite dynamique. Quel que soit le régime d'écoulement du fluide, on considère que la résistance thermique est entièrement située dans cette couche limite thermique qui joue le rôle d'isolant.

Ceci correspond au modèle de Prandtl représenté sur la figure 5.5 à titre d'exemple pour l'écoulement turbulent d'un fluide dans une conduite.

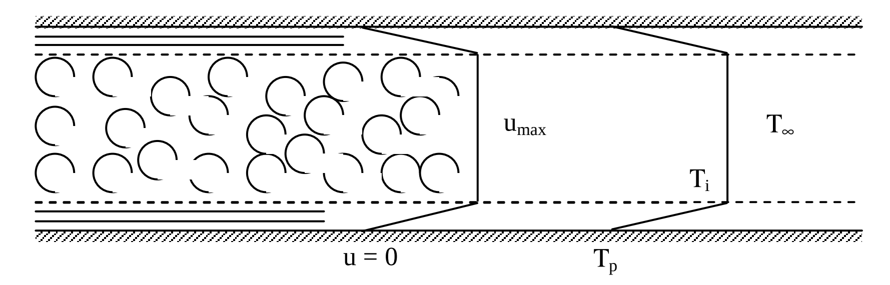


Figure 5.5 : Représentation du modèle de Prandtl pour un écoulement turbulent dans une conduite

Expression du flux

Quel que soit le type de convection (libre ou forcée) et quel que soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent), le flux de chaleur φ est donné par la relation dite loi de Newton :

$$\varphi = h\ S\ \Delta\theta \tag{5.4}$$

Le problème majeur à résoudre avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer le coefficient de transfert de chaleur par convection h qui dépend d'un nombre important de paramètres : caractéristiques du fluide, de l'écoulement, de la température, de la forme de la surface d'échange,...

On trouvera dans le tableau 5.1 l'ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection pour différentes configurations.

Tableau 5.1 : Ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection

Configuration	h ($Wm^{-2}\ °C^{-1}$)
Convection naturelle	
Dans un gaz	2-10
Dans un liquide	100-1000
Convection forcée	
Avec un gaz	10-200
Avec un liquide	100-5000
Ebullition de l'eau	
Dans un récipient	2500-35000
En écoulement dans un tube	5000-100000
Condensation de l'eau sous 1 atm	
Sur une surface verticale	1000-11000
A l'extérieur de tubes horizontaux	10000-25000

5.2.3 Calcul du flux de chaleur en convection forcée

Calcul exact

Dans certains cas de figure simples, un calcul théorique peut permettre d'aboutir à une expression analytique du flux de chaleur échangé par convection entre un fluide et une paroi. Nous traiterons ici à titre d'exemple le cas classique de l'écoulement laminaire en régime permanent d'un fluide à propriétés physiques constantes à la température T_∞ sur une paroi plane de longueur L maintenue à une température T_p (cf. figure 5.6).

On constate que la vitesse du fluide évolue d'une valeur nulle à la paroi à une valeur proche de u_∞ dans une zone d'épaisseur $\delta(x)$ appelée couche limite dynamique. De la même manière, la température du fluide évolue de la valeur T_p à la paroi à une valeur proche de T_∞ dans une zone d'épaisseur $\Delta(x)$ appelée couche limite thermique.

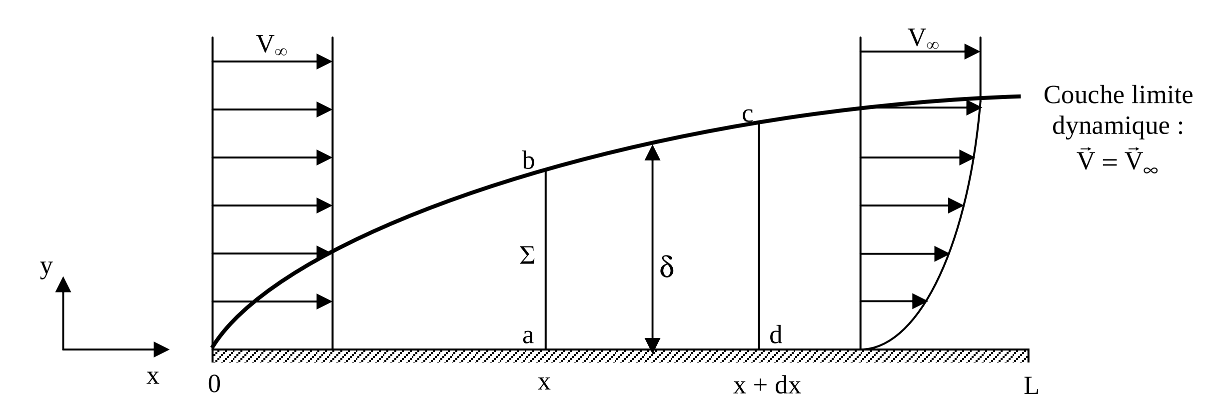


Figure 5.6 : Schématisation du développement d'une couche limite dynamique sur une plaque plane

L'équation de conservation de la masse s'écrit sous forme intégrale (cf. annexe A.5.1) :

$$\int_\Lambda \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv + \int_\Sigma \rho\,\vec{V}.\vec{n}\,dS = 0$$

Où $\vec{n}$ est la normale extérieure à Σ.

En régime permanent : $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. Appliquons cette relation au volume [abcd] représenté sur la figure 5.6 :

$$\int_\Sigma \rho\,\vec{V}.\vec{n}\,dS = \underbrace{-\rho\left(\int_0^\delta u\,dy\right)_x}_{\text{flux masse sortant par ab}} + \underbrace{\rho\left(\int_0^\delta u\,dy\right)_{x+dx}}_{\text{flux masse sortant par cd}} + \underbrace{\int_{bc} \rho\,\vec{V}_\infty.\vec{n}\,dS}_{\text{flux masse sortant par bc}} = 0$$

On en déduit : $\int_{bc} \rho\,\vec{V}_\infty.\vec{n}\,dS = -\rho\,\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta u\,dy\right)dx$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement en régime permanent (Théorème d'Euler, cf. annexe A.5.1) s'écrit :

$$\int_\Sigma \rho\,\vec{V}\left(\vec{V}.\vec{n}\right)dS = \int_\Lambda \rho\,\vec{f}\,dv + \int_\Sigma \vec{T}\,dS = \int_\Sigma \vec{T}\,dS$$ car f = 0 (pas de force de volume due à un champ extérieur)

Où $\vec{T}$ sont les forces extérieures (par unité de surface) s'exerçant par contact sur les faces de la surface Σ délimitant le volume Λ.

Appliquons cette relation au volume [abcd] :

$$\int_\Sigma \rho\,\vec{V}\left(\vec{V}.\vec{n}\right)dS = -\rho\left(\int_0^\delta \vec{V}\,u\,dy\right)_x + \rho\left(\int_0^\delta \vec{V}\,u\,dy\right)_{x+dx} + \int_{bc} \rho\,\vec{V}_\infty\left(\vec{V}_\infty.\vec{n}\right)dS$$ (par unité de largeur)

Soit en projection suivant Ox :

$$\int_\Sigma \rho\,u\left(\vec{V}.\vec{n}\right)dS = -\rho\left(\int_0^\delta u^2\,dy\right)_x + \rho\left(\int_0^\delta u^2\,dy\right)_{x+dx} + \int_{bc} \rho\,u_\infty\left(\vec{V}_\infty.\vec{n}\right)dS$$

$$\int_\Sigma \rho\,u\left(\vec{V}.\vec{n}\right)dS = -\rho\left(\int_0^\delta u^2\,dy\right)_x + \rho\left(\int_0^\delta u^2\,dy\right)_{x+dx} + \rho\,u_\infty \int_{bc} \vec{V}_\infty.\vec{n}\,dS$$

D'où en utilisant l'équation de conservation de la masse :

$$\int_\Sigma \rho\, u \left(\vec{V}.\vec{n}\right) dS = \rho\, \frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta u^2\, dy\right) dx - \rho\, u_\infty\, \frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta u\, dy\right) dx$$

Analysons les forces en présence suivant Ox :

- sur [ad] s'exerce le frottement pariétal
- sur [bc] comme le profil de vitesse est uniforme, il n'y a pas de frottement
- il n'y a pas de forces de pression puisque la pression est uniforme dans l'écoulement.

On peut donc écrire :

$$\int_\Sigma \vec{T}\, dS = -\tau_p\, dx \quad \text{d'où :} \quad -\tau_p\, dx = \rho\, \frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta u^2\, dy\right) dx - \rho\, u_\infty\, \frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta u\, dy\right) dx \quad \text{car} \quad \int_\Sigma \rho\, \vec{V}\left(\vec{V}.\vec{n}\right) dS = \int_\Sigma \vec{T}\, dS$$

On en déduit : $\dfrac{\tau_p}{\rho\, u_\infty^{\,2}} = \dfrac{d}{dx}\left[\delta \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)\right]$ (a)

On cherche a priori la vitesse sous la forme simple d'un profil parabolique : $\dfrac{u}{u_\infty} = a + b\left(\dfrac{y}{\delta}\right) + c\left(\dfrac{y}{\delta}\right)^2$

La vitesse est nulle à la paroi : $u(y=0)=0$

La continuité de la vitesse et du frottement à la frontière de la couche limite impose les conditions suivantes :

$u(y=\delta) = u_\infty$

$\mu\, \dfrac{du}{dy}(y=\delta) = 0$

On en déduit que : $\dfrac{u}{u_\infty} = \dfrac{y}{\delta}\left(2 - \dfrac{y}{\delta}\right)$ (b)

et $\tau_p = \mu \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 2\,\mu\, \dfrac{u_\infty}{\delta}$

Les relations (a) et (b) conduisent à : $\dfrac{2\,\mu}{\rho\, V_\infty\, \delta} = \dfrac{2}{15}\, \dfrac{d\delta}{dx}$

Puis par intégration : $\delta^2 = 30\, \dfrac{\mu\, x}{\rho\, u_\infty}$ ou encore : $\left(\dfrac{\delta}{x}\right)^2 = 30\, \dfrac{\mu}{\rho\, u_\infty\, x} = \dfrac{30}{Re_x}$

$$\tau_p = 2\,\mu\, \frac{u_\infty}{\delta} = 2\,\mu\, u_\infty \sqrt{\frac{\rho\, u_\infty}{30\,\mu\, x}}$$

On en déduit l'expression du coefficient de frottement : $C_{f\,x} = \dfrac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho\, u_\infty^{\,2}} = \dfrac{2\,\mu\, u_\infty \sqrt{\dfrac{\rho\, u_\infty}{30\,\mu\, x}}}{\frac{1}{2}\rho\, u_\infty^{\,2}}$

On obtient finalement : $C_{f\,x} = \dfrac{0{,}73}{Re_x^{\,0{,}5}}$

Une analyse plus précise (équations locales et pas d'hypothèses sur la forme du profil de vitesse) conduirait à une constante de 0,664 au lieu de 0,73.

A pression constante, la variation d'enthalpie d'un système est égale à la chaleur fournie à ce système. En appliquant ce principe à un volume (Λ) de surface (Σ) et en négligeant la dissipation visqueuse (source interne de chaleur correspondant à la dégradation de l'énergie mécanique en chaleur), il vient :

$$\int_\Lambda \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, H)\, dV + \int_\Sigma \left(\rho\, H\, \vec{V} + \vec{q}\right).\vec{n}\, dS$$

où H désigne l'enthalpie massique du fluide et $\vec{q}$ le vecteur densité de flux de chaleur.

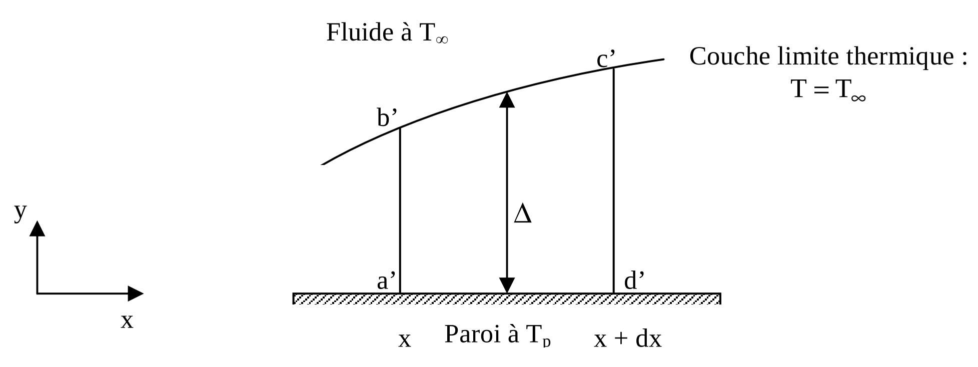


Figure 5.7 : Schématisation de la couche limite thermique sur une plaque plane

Appliquons cette relation en régime permanent au volume [a'b'c'd'] représenté sur la figure 5.7 pour un fluide tel que $H = c_p\,(T - T_0)$ (la pression est supposée constante). La densité de flux de chaleur conductif est nulle sur la surface [b'c'] puisqu'à l'extérieur de la couche limite thermique la température est uniforme et vaut T_∞. D'autre part, on néglige le flux de chaleur longitudinal (suivant Ox) devant le flux de chaleur transversal (suivant Oy), la température variant beaucoup plus rapidement dans la direction Oy que dans la direction Ox (hypothèse de couche limite). Il vient alors :

$$-\left(\rho\, c_p \int_0^\Delta u\, T\, dy\right)_x + \left(\rho\, c_p \int_0^\Delta u\, T\, dy\right)_{x+dx} + \rho\, c_p\, T_\infty \int_{b'c'} u\, dS - q_p\, dx = 0$$

où $q_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$ est la densité de flux de chaleur échangé à la paroi (positive si entrant dans le volume [a'b'c'd']).

En appliquant la conservation de la masse au volume [a'b'c'd'], il vient :

$$\int_{b'c'} \rho\, \vec{V} . \vec{n}\, dS = \rho \int_{b'c'} u\, dS = -\rho \frac{d}{dx}\left(\int_0^\Delta u\, dy\right)$$

d'où : $\frac{d}{dx}\left(\rho\, c_p \int_0^\Delta u\, T\, dy\right) dx - \rho\, c_p\, T_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^\Delta u\, dy\right) dx - q_p\, dx = 0$

$$\frac{q_p}{\rho\, c_p\, u_\infty\, (T_p - T_\infty)} = +\frac{d}{dx}\left[\Delta \int_0^1 \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}\right) d\left(\frac{y}{\Delta}\right)\right] \qquad \text{(c)}$$

On cherche a priori la température sous la forme : $\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = a + b\left(\frac{y}{\Delta}\right) + c\left(\frac{y}{\Delta}\right)^2$

La continuité de la température et du flux de chaleur impose les conditions suivantes :

$$\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}(y = 0) = 0$$

$$\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}(y = \Delta) = 1$$

$$\lambda \frac{dT}{dy}(y = \Delta) = 0$$

On en déduit que : $\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = \frac{y}{\Delta}\left(2 - \frac{y}{\Delta}\right)$ (d)

Et : $q_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 2\,\lambda \frac{T_p - T_\infty}{\Delta}$

Les relations (c) et (d) permettent d'écrire : $\frac{q_p}{\rho\, c_p\, u_\infty\, (T_p - T_\infty)} = +\frac{d}{dx}\left[\Delta \int_0^1 \frac{y}{\delta}\left(2 - \frac{y}{\delta}\right)\left(1 - \frac{y}{\Delta}\left(-2\frac{y}{\Delta_p}\right)\right) d\left(\frac{y}{\Delta}\right)\right]$

On se place dans le cas où $\Delta < \delta$ et on suppose que $r = \frac{\Delta}{\delta} \leq 1$ reste constant

La relation précédente devient alors : $\Delta \frac{d\Delta}{dx} = \frac{12\,\lambda}{\rho\, c_p\, u_\infty\, r\left(1 - \frac{r}{5}\right)}$

Puis après intégration : $\left(\frac{\Delta}{x}\right)^2 = \frac{24}{Re_x\ Pr} \frac{1}{r\left(1 - \frac{r}{5}\right)}$ où $Re_x = \frac{\rho\, V_\infty\, x}{\mu}$

Par ailleurs : $\left(\frac{\delta}{x}\right)^2 = \frac{30}{Re_x}$

r est donc solution de l'équation : $r^2 = \frac{4}{5\ Pr\left(1 - \frac{r}{5}\right) r}$ (e)

Dans le cas Pr = 1, la solution de l'équation (e) est r = 1, les couches limites dynamique et thermique ont la même épaisseur et il y a analogie complète entre les transferts de chaleur et de quantité de mouvement. C'est le cas des gaz pour lesquels $Pr \approx 1$.
Le cas r <1 correspond au cas Pr > 1, c'est le cas de l'eau par exemple ($Pr \approx 7$). Une solution approchée de l'équation (e) est alors : $\frac{\Delta}{\delta} \approx Pr^{-\frac{1}{3}}$

La densité de flux de chaleur à la paroi s'écrit : $q_p = h\left(T_p - T_\infty\right) = 2\,\frac{\lambda}{\Delta}\left(T_p - T_\infty\right)$

Et : $Nu_x = \frac{h\,x}{\lambda} = \frac{2\,x}{\delta}\,\frac{\delta}{\Delta} = 0{,}36\ Re_x^{\frac{1}{2}}\ Pr^{\frac{1}{3}}$

Un calcul plus précis conduirait à :

$$Nu_x = 0{,}332\ Re_x^{1/2}\ Pr^{1/3} \qquad (5.5)$$

Le flux global s'obtient par intégration de q_p entre x = 0 et x = L et on en déduit le nombre de Nusselt moyen sur la surface de longueur L :

$$\overline{Nu}_L = 0{,}664\ Re_L^{1/2}\ Pr^{1/3} \qquad (5.6)$$

<u>Calcul approché</u>

Dans les cas plus complexes où une solution analytique ne peut pas être établie, on utilise des corrélations déduites d'expérimentations.

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels :

$$Nu = f\,(Re, Pr) \qquad (5.7)$$

Définis par :

$Nu = \frac{h\,D}{\lambda}$ Nombre de Nusselt

$Re = \frac{\rho\, u\, D}{\mu}$ Nombre de Reynolds

$Pr = \frac{c_p\,\mu}{\lambda}$ Nombre de Prandtl

où D est la dimension caractéristique de la géométrie considérée qui sera par exemple le diamètre hydraulique $Dh = \frac{4 \times \text{Section de passage}}{\text{Périmètre}}$ pour un écoulement dans un conduit (égal au diamètre intérieur pour un conduit cylindrique), le diamètre extérieur pour un écoulement extérieur perpendiculaire à un tube, la longueur pour un écoulement à surface libre sur une plaque…

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection forcée s'effectue donc de la manière suivante :

1. Calcul des nombres adimensionnels de Reynolds et de Prandtl.
2. Suivant la valeur de Re et la configuration → choix de la corrélation (fonction f dans la relation 5.7).
3. Calcul de Nu par application de cette corrélation.
4. Calcul de $h = \frac{\lambda\ Nu}{D}$ et de $\varphi = h\,S\left(T_p - T_\infty\right)$.

Pour la convection forcée, les principales corrélations sont données en annexe A.5.2. Les propriétés du fluide (c_p, ρ, λ, μ) sont calculées à une température moyenne dite température de film : $T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$

5.2.4 Calcul du flux de chaleur en convection naturelle

Mécanisme de la convection naturelle

Considérons un fluide au repos en contact avec une paroi plane à température T_0. Si l'on porte la paroi à une température $T = T_0 + \Delta T$, le fluide au contact de la paroi va s'échauffer par conduction et la masse du volume unité va passer de ρ_0 à $\rho_0 - \Delta\rho$:

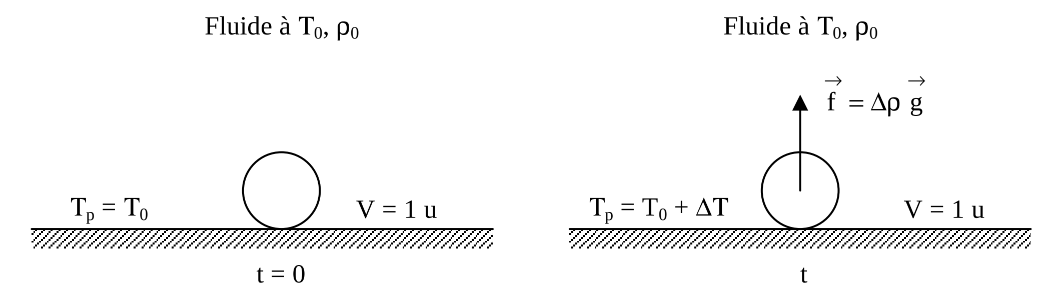


Figure 5.8 : Représentation du mécanisme de convection naturelle

Il sera donc soumis à une force ascensionnelle $\vec{f} = -\Delta\rho\ \vec{g}$. Le principe fondamental de la dynamique permet d'évaluer l'accélération du fluide :

Pour un volume unité : $m = \rho$ d'où : $\Delta\rho\ g = \rho\ \gamma$ et $\gamma = \frac{\Delta\rho}{\rho}\ g$

En introduisant le coefficient de dilatation cubique β du fluide défini par $\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta T}\right)_p$, il vient :

$$\gamma = -\beta\ g\ \Delta T$$

$\beta\ g\ \Delta T$ est donc le module de l'accélération produite par l'expansion thermique due à la variation ΔT de la température T_0. Ce mouvement du fluide induit par les différences de masse volumique résultantes des gradients de température va donner naissance aux courants de convection.

Dans le cas d'un transfert de chaleur par convection naturelle le long d'une plaque plane, le coefficient de convection dépend des caractéristiques du fluide : λ, ρ, μ, c_p, β, g, de la paroi caractérisée par la longueur L et de l'écart de température Δθ aux bornes du film, ce que l'on peut traduire par une relation du type :

$$\phi = f\left(\lambda, \rho, \mu, c_p, \beta, g, L, \Delta T\right)$$

Dans le système M, L, T, θ, Q, cette relation entre 8 grandeurs se réduit à une relation entre trois nombres adimensionnels :

$$\boxed{Nu = f\left(Gr, Pr\right)} \qquad (5.8)$$

Définis par :

$Nu = \frac{h\ D}{\lambda}$ Nombre de Nusselt

$$Gr = \frac{\beta\, g\, \Delta T\, \rho^2\, L^3}{\mu^2} \qquad \text{Nombre de Grashof}$$

$$Pr = \frac{c_p\, \mu}{\lambda} \qquad \text{Nombre de Prandtl}$$

Signification physique du nombre de Grashof

Lorsque la masse unité du fluide, soumise à l'accélération $\beta\, g\, \Delta T$ subit une variation d'altitude L, la conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{u^2}{2} = \beta\, g\, \Delta T L$$

$\frac{u^2}{2}$ représente la variation d'énergie cinétique et $\beta\, g\, \Delta T\, L$ la variation d'énergie potentielle.

On voit donc que le nombre de Grashof peut se mettre sous la forme :

$$Gr = \frac{1}{2}\left(\frac{u\, L\, \rho}{\mu}\right)^2$$

Il est donc proportionnel au carré d'un nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement. En pratique, en convection naturelle, le courant qui prend naissance reste laminaire jusqu'à ce que le nombre de Grashof atteigne une valeur d'environ 10^9.

Calcul du flux de chaleur en convection naturelle

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels : Nu = f (Gr, Pr) définis par :

$$Nu = \frac{h\, D}{\lambda} \qquad \text{Nombre de Nusselt}$$

$$Gr = \frac{\beta\, g\, \Delta T\, \rho^2\, L^3}{\mu^2} \qquad \text{Nombre de Grashof}$$

$$Pr = \frac{c_p\, \mu}{\lambda} \qquad \text{Nombre de Prandtl}$$

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection naturelle s'effectue donc de la manière suivante :

1. Calcul des nombres adimensionnels de Grashof et de Prandtl .
2. Suivant la valeur de Gr et configuration → choix de la corrélation.
3. Calcul de Nu par application de cette corrélation.
4. Calcul de $h = \frac{\lambda\, Nu}{D}$ et de $\varphi = h\; S\; \left(T_p - T_\infty\right)$

Pour la convection naturelle, les principales corrélations sont données en annexe A.5.3. Les propriétés du fluide (c_p, ρ, λ, μ) sont calculées à la température moyenne de film comme en convection forcée.

5.3 Convection avec changement d'état

5.3.1 Condensation

Phénomènes

Les échanges de chaleur entre une vapeur se condensant sur une paroi et la paroi proprement dite sont liés

aux types de condensation qui dépendent essentiellement des interactions liquide-paroi.

Si le liquide ne mouille pas la surface, il se forme alors en certains points des gouttelettes de liquide qui ruissellent le long de la paroi . Ce type de condensation ne peut s'observer que si la paroi a une surface lisse et propre. Dans le cas d'une condensation en gouttes, le liquide qui ne forme pas un film continu sur la paroi offre une résistance thermique négligeable.

Cependant, le type de condensation que l'on rencontre généralement dans la pratique est la condensation en film : la paroi est isolée de la vapeur par un film continu de liquide qui joue le rôle d'isolant thermique entre la paroi et la vapeur et fait chuter la valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h par rapport à la condensation en gouttes.

<u>Valeur du coefficient h pour la condensation en film</u>

La théorie de Nusselt, établie en 1916, relie analytiquement le coefficient de transfert h aux divers paramètres physiques intervenant dans la condensation en film d'un fluide sur une paroi :

<u>Paroi verticale</u>

Hypothèses :

- Ecoulement laminaire du film.
- Température de paroi constante.
- Gradient de température constant dans le film.
- Grand rayon de courbure du film de condensat.

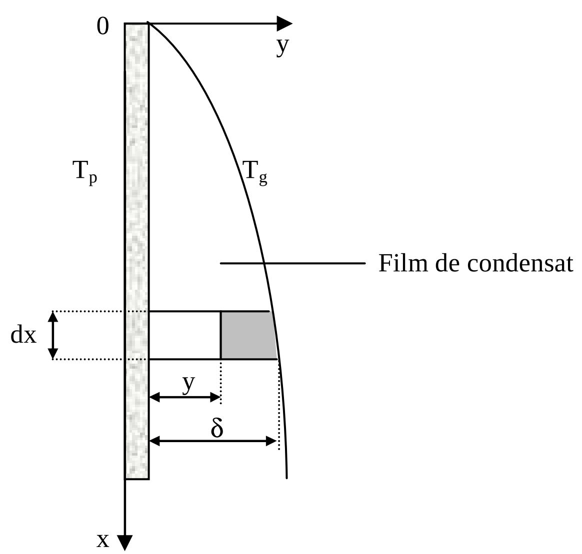


Figure 5.9 : Schématisation de la condensation sur une paroi verticale

On notera T_g la température de saturation (rosée) de la vapeur et T_p ($<T_g$) la température maintenue constante de la paroi verticale.

Les forces s'exerçant sur le système constitué du liquide d'épaisseur dx compris entre y et δ et de longueur unité suivant Oz (surface grise) sont :

- La force de pesanteur : $\rho_l\; g\left(\delta - y\right)dx$
- La force due à la vapeur d'eau déplacée : $\rho_v\; g\left(\delta - y\right)dx$
- La force de frottement visqueux : $\mu_l \dfrac{du}{dy}dx$ (hypothèse du fluide newtonien)

Le bilan des forces s'écrit : $\rho_l\; g\left(\delta - y\right)dx = \mu_l \dfrac{du}{dy}dx + \rho_v\; g\left(\delta - y\right)dx$

En intégrant l'équation précédente entre y = 0 et y = δ avec la condition limite u = 0 en y = 0, on obtient :

$$u = \frac{\left(\rho_l - \rho_v\right)g}{\mu_l}\left(\delta\, y - \frac{1}{2}\, y^2\right)$$

Le débit massique de liquide condensé à une hauteur x (par unité de longueur suivant Oz) est donné par :

$$m = \int_0^\delta \rho_l \left[\frac{(\rho_l - \rho_v)\, g}{\mu_l} \left(\delta\, y - \frac{1}{2}\, y^2 \right) \right] dy = \rho_l\, \frac{(\rho_l - \rho_v)\, g\, \delta^3}{3\mu_l}$$

Le flux de chaleur cédé par le condensat à la paroi sur la hauteur dx s'écrit :

$$\varphi_x = -\lambda\, dx \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda\, dx\, \frac{T_p - T_\infty}{\delta}$$

Entre les hauteurs x et x + dx, l'épaisseur du film de liquide passe de δ à δ + dδ du fait de la condensation sur la hauteur dx. La quantité de vapeur condensée entre x et x + dx s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\left[\rho_l\, \frac{(\rho_l - \rho_v)\, g\, \delta^3}{3\mu_l} \right] dx = \frac{d}{d\delta}\left[\rho_l\, \frac{(\rho_l - \rho_v)\, g\, \delta^3}{3\mu_l} \right] \frac{d\delta}{dx}\, dx = \rho_l\, \frac{(\rho_l - \rho_v)\, g\, \delta^2\, d\delta}{\mu_l}$$

Le flux de chaleur cédé par le condensat à la paroi doit être égal à la chaleur latente de condensation libérée par la quantité de vapeur calculée ci-dessus soit :

$$\rho_l\, \frac{(\rho_l - \rho_v)\, g\, \delta^2\, d\delta}{\mu_l}\, \Delta H = \lambda\, dx\, \frac{T_g - T_p}{\delta}$$

L'intégration de cette équation avec la condition limite δ = 0 en x = 0 conduit à :

$$\delta = \left[\frac{4\mu_l\, \lambda_l\, x\, (T_g - T_p)}{g\, \Delta H\, \rho_l\, (\rho_l - \rho_v)} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Le coefficient de transfert de chaleur local (en x) par convection vérifie : $h_x\, dx\, (T_g - T_p) = \lambda_l\, dx\, \dfrac{T_g - T_p}{\delta}$

D'où : $h_x = \dfrac{\lambda_l}{\delta}$

Soit : $h_x = \left[\dfrac{g\, \Delta H\, \rho_l\, (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^{\,3}}{4\mu_l\, x\, (T_g - T_p)} \right]^{\frac{1}{4}}$

Le coefficient de transfert moyen s'obtient en intégrant le coefficient local sur la hauteur L de la surface condensante : $h_v = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_0^L h_x\, dx$

Soit finalement :

$$h_v = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\lambda_l^{\,3}\, \rho_l^{\,2}\, g\, \Delta H}{L\, \mu_l\, \Delta T} \right)^{1/4} \qquad (5.9)$$

Avec :

ΔH : chaleur latente de condensation (J kg^{-1})
ΔT : différence entre la température de rosée de la vapeur et la température de la paroi (°C)
L : hauteur de la paroi (m)

Condition de validité : Re < 2100

Considérons par exemple le cas d'un tube vertical de diamètre extérieur De.
Soient M : débit massique de condensat
S : section de passage du film liquide
On définit le diamètre hydraulique D_h du film par :

$$D_h = 4\, \frac{\text{section passage}}{\text{périmètre mouillé}} = 4\, \frac{S}{\pi\, De} \quad \text{d'où} \quad Re = \frac{\rho_l\, u\, D_h}{\mu_l} = \frac{\rho_l\, u}{\mu_l}\, \frac{4S}{\pi\, De} = \frac{4M}{\mu_l\, \pi\, De}$$

La condition de validité s'écrit donc dans ce cas : $\dfrac{4M}{\mu_l\, \pi\, De} < 2100$

Remarque :

Les grandeurs physiques relatives au liquide sont évaluées à la température du film définie par la formule de Drew : $T_f = \dfrac{3T_p + T_v}{4}$

Tube horizontal

Une valeur moyenne de h pour un tube horizontal peut être calculée par :

$$h_h = 0{,}725 \left(\frac{\lambda_l^3 \rho_l^2 \, g \, \Delta H}{De \, \mu_l \, \Delta T} \right)^{1/4} \tag{5.10}$$

Avec la condition de validité : $Re = \dfrac{4M}{\mu_l \, \pi \, De} < 2100$

Comparaison entre tube horizontal et vertical

Si l'on note L_v la longueur du tube vertical et De_h le diamètre extérieur du tube horizontal, le rapport des deux expressions de h conduit à :

$$\frac{h_h}{h_v} = 0{,}769 \left(\frac{L_v}{De_h} \right)$$

D'où $h_h > h_v$ si $L_v > 2{,}86 \; De_h$ ce qui est pratiquement toujours le cas. Dans les mêmes conditions de température, le coefficient de transfert est plus élevé sur un tube horizontal que sur un tube vertical.

Dans le cas des condenseurs à faisceaux tubulaires, les tubes n'étant pas tous dans un même plan horizontal, le liquide tombant d'un tube va « épaissir » le film qui existe sur le tube situé en-dessous de lui de sorte que le coefficient de transfert de chaleur h est moins élevé sur les tubes inférieurs.

En tenant compte du recyclage du condensat sur les tubes inférieurs, Nusselt a proposé la relation suivante pour calculer la valeur moyenne de h pour un ensemble de N tubes situés dans un même plan vertical :

$$\overline{h_h} = 0{,}725 \left(\frac{\lambda_l^3 \rho_l^2 \, g \, \Delta H}{N \, De \, \mu_l \, \Delta T} \right)^{1/4} \tag{5.11}$$

L'expérience a montré que cette formule théorique donne des valeurs de h inférieures à celles déterminées expérimentalement et qu'il convient de multiplier la valeur de h donné par la formule (5.9) par un facteur correctif selon la formule suivante :

$$\overline{h_h}_{\,corrigé} = \overline{h_h} \left[1 + 0{,}2(N-1) \frac{c_p \, \Delta T}{\Delta H} \right] \tag{5.12}$$

5.3.2 Ebullition

Formation des gouttelettes et des bulles

La pression d'équilibre d'une gouttelette de liquide dans sa vapeur est de la forme : $p_{rg}(T) = p_S(T) + \dfrac{2\sigma}{r}$, cf. figure 5.10. Si $r_g \to 0$ alors $p_{rg} \to \infty$, donc une gouttelette ne pourrait théoriquement pas prendre naissance dans une vapeur qui est un milieu continu. Lors du refroidissement d'une vapeur à pression constante, la condensation va donc être initiée sur des « germes » de très petits diamètres (poussières en suspension dans l'atmosphère par exemple) à une température T_g inférieure à la température de saturation $T_s(p)$. Le développement de la condensation va ensuite avoir pour effet d'augmenter la taille des gouttelettes et diminuer l'écart entre T_g et $T_s(p)$.

De manière analogue, lorsque l'on chauffe un liquide, on suppose que sur les parois chaudes sur lesquelles se produit l'ébullition se trouvent des discontinuités (petites cavités contenant de l'air) qui servent de "germes" favorisant la naissance de bulles de petit diamètre à une température T_b supérieure à la température de saturation $T_s(p)$. Le développement de l'ébullition va ensuite avoir pour effet d'augmenter la taille des bulles et diminuer l'écart entre T_b et $T_s(p)$.

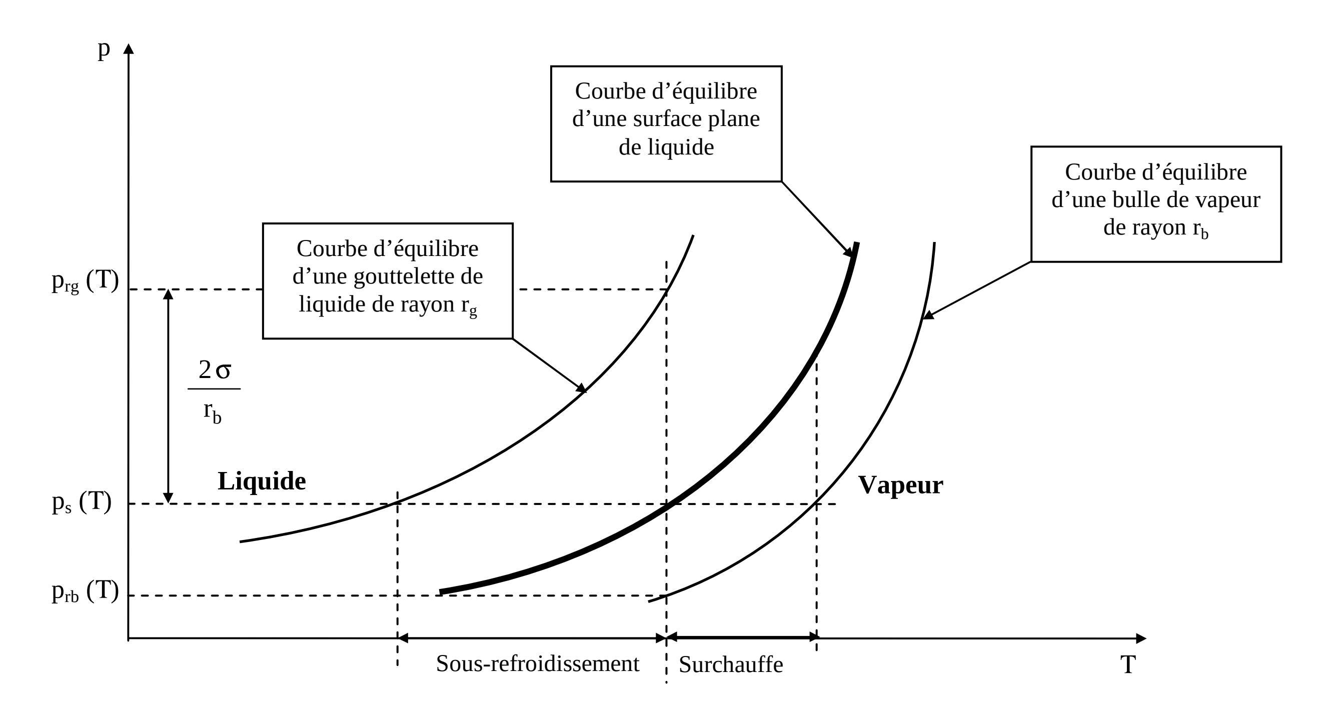


Figure 5.10 : Diagramme général d'équilibre liquide-vapeur

Les différents régimes d'ébullition

Les variations du coefficient de transfert de chaleur h en fonction de l'écart de température $T_p - T_s(p)$, où T_p est la température de la paroi chauffée, présentent la même allure pour un grand nombre de liquides, elles sont représentées par le graphe de Nukiyama (cf. figure 5.11).

Zone AB

Bien que $\theta_p > \theta_s(p)$, il n'y a pas encore naissance de bulles. L'échange paroi-liquide s'effectue par convection naturelle et obéit à la loi de Newton : $\varphi = h\,S\left(T_p - T_\infty\right)$, h se calculant par les corrélations concernant la convection naturelle (cf. annexe A.5.2). Une évaporation se produit sur la surface plane et libre du liquide en contact avec l'air.

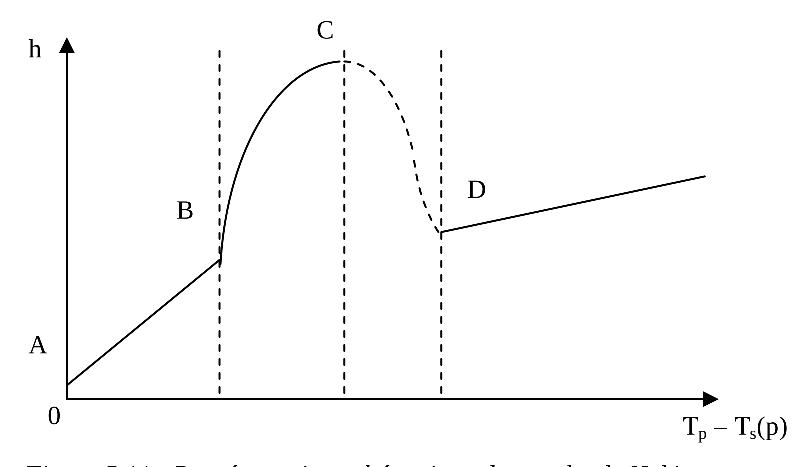


Figure 5.11 : Représentation schématique du graphe de Nukiyama

Zone BC

Les bulles montent en colonne à partir de points isolés de la paroi : les « sites » avec une fréquence de l'ordre de 100 par seconde. Ensuite les bulles deviennent de plus en plus nombreuses et isolent presque totalement la paroi par une couche de vapeur presque continue. L'évacuation de la chaleur s'effectue principalement sous forme de chaleur latente de vaporisation. C'est la zone d'ébullition nucléée.

La densité de flux de chaleur Φ transférée dans cette zone peut être calculée par la formule suivante (Rosenhow, 1985) :

$$\frac{c_l\ \Delta T}{\Delta H\left(Pr_l\right)^s} = C\left[\frac{\Phi}{\mu_l\ \Delta H}\sqrt{\frac{\sigma}{g\left(\rho_l-\rho_v\right)}}\right]^{0,33} \qquad (5.13)$$

Où : c_l Capacité thermique du liquide
ΔT Ecart de température $T_p - T_s(p)$
ΔH Chaleur latente de vaporisation
Pr_l Nombre de Prandtl du liquide à saturation
σ Tension superficielle (valeur pour l'eau dans le tableau 5.2)
g Accélération de la pesanteur
ρ_l Masse volumique du liquide
ρ_v Masse volumique de la vapeur
C Constante déterminée expérimentalement (cf. valeurs dans le tableau 5.3)
s s = 1 pour l'eau, 1,7 pour les autres liquides

Tableau 5.2: Valeur de la tension superficielle pour l'eau (d'après Holman, 1990)

Température saturation	Tension superficielle
°C	10^{-3} N.m^{-1}
0	75,6
15,6	73,3
37,8	69,8
60	66,0
93,3	60,1
100	58,8
160	46,1
226,7	32,0
293,3	16,2
360	1,46
374,1	0

Tableau 5.3: Valeurs de la constante C pour diverses configurations fluide/surface chauffante (d'après Holman, 1990)

Configuration	C		
Eau-Cuivre	0,013	Benzènze-Chrome	0,010
Eau-Platine	0,013	Alcool éthylique-Chrome	0,027
Eau-Laiton	0,006	n-Pentane-Chrome	0,015
Eau-Cuivre poli à l'émeri	0,0128	n-Pentane-Cuivre poli à l'émeri	0,0154
Eau-Acier inox poli	0,0080	n-Pentane-Nickel poli à l'émeri	0,0127
Tetrachlorure de carbone-Cuivre	0,013	Alcool isopropylique-Cuivre	0,00225
Tetrachlorure de carbone-Cuivre poli	0,007	Acool n-Butyl-Cuivre	0,00305

Point C

La couche de vapeur isole totalement la paroi du liquide et la chaleur ne peut plus se transmettre que par l'intermédiaire de la vapeur de très faible conductivité thermique. L'augmentation brutale de la résistance thermique va provoquer une brusque augmentation de la température de la paroi chauffante jusqu'à un niveau

qui va permettre d'évacuer le flux fourni à la paroi à la fois par conduction-convection et par rayonnement. On passe ainsi brusquement du point C au point D dont la température dépasse largement 1000°C, on a fusion de la paroi dans la plupart des cas, c'est pourquoi le point C est appelé point de burn-out.

La détermination du point de burn-out est capitale dans l'étude de l'ébullition pour d'évidentes raisons de sécurité. La corrélation la plus utilisée pour déterminer cette densité de flux de burn-out est la suivante (Zuber, 1958) :

$$\phi_{bo} = \frac{\pi \rho_v}{24} \Delta H \left[\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{{\rho_v}^2} \right]^{1/4} \left(1 + \frac{\rho_v}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.14)$$

Zone CD

Zone instable.

Zone DE

Zone d'ébullition pelliculaire dans laquelle le transfert de chaleur de la paroi vers le liquide s'effectue par conduction et par rayonnement à travers la couche continue de vapeur. Les coefficients de transfert de chaleur peuvent se calculer par (Bromley,1950) :

Conduction :

$$h_c = 0{,}62 \left[\frac{{\lambda_v}^3 \rho_v (\rho_l - \rho_v) g (\Delta H + 0{,}4\, c_{pv}\, \Delta T)}{d\, \mu_v\, \Delta T} \right]^{\frac{1}{4}} \qquad (5.15)$$

Rayonnement :

$$h_r = \frac{\sigma \varepsilon \left({T_p}^4 - {T_{sat}}^4 \right)}{T_p - T_{sat}} \qquad (5.16)$$

Global :

$$h = h_c \left(\frac{h_c}{h} \right)^{\frac{1}{3}} + h_r \qquad (5.17)$$

La relation empirique (5.17) nécessite l'utilisation d'une méthode itérative pour calculer le coefficient global h.

Intérêt du transfert de chaleur par ébullition

Outre dans les générateurs de vapeur d'eau largement utilisés dans les industries agro-alimentaires et textiles, ce type de transfert est utilisé pour l'extraction de très importantes puissances calorifiques à partir de surfaces très réduites : refroidissement de coeurs de réacteurs nucléaires, de moteurs de fusée... du fait des valeurs élevées des coefficients de transfert, de l'ordre de 100 000 W m^{-2} $°C^{-1}$.

6 INTRODUCTION AUX ECHANGEURS DE CHALEUR

6.1 Les échangeurs tubulaires simples

6.1.1 Généralités. Définitions

6.1.1.1 Description

Un échangeur de chaleur est un système qui permet de transférer un flux de chaleur d'un fluide chaud à un fluide froid à travers une paroi sans contact direct entre les deux fluides.

Exemples : radiateur d'automobile, évaporateur de climatiseur, ...

Un échangeur tubulaire simple est constitué de deux tubes cylindriques coaxiaux. Un fluide (généralement le chaud) circule dans le tube intérieur, l'autre dans l'espace compris entre les deux tubes. Le transfert de chaleur du fluide chaud au fluide froid s'effectue à travers la paroi que constitue le tube intérieur :

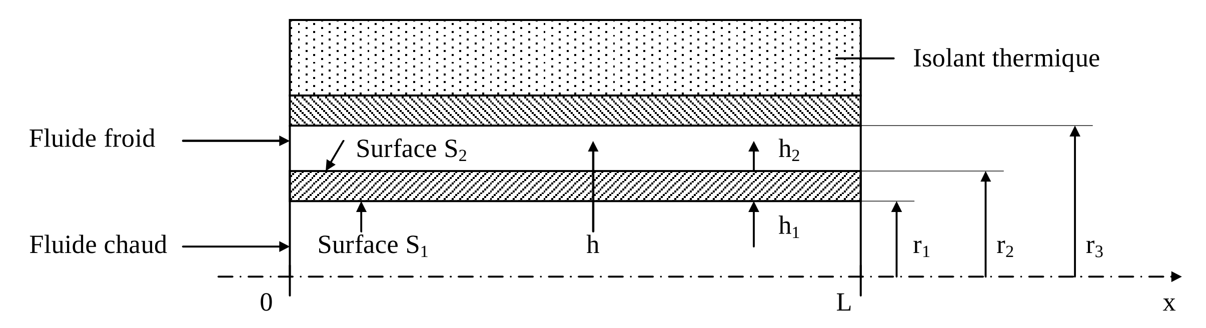


Figure 6.1 : Schéma d'un échangeur tubulaire simple

6.1.1.2 Hypothèses

Dans les calculs qui suivent, nous avons retenu les hypothèses suivantes :

- Pas de pertes thermiques : la surface de séparation est la seule surface d'échange.
- Pas de changement de phase au cours du transfert.

6.1.1.3 Conventions

Le fluide chaud entre dans l'échangeur à la température T_{1e} et en sort à T_{1s}, le fluide froid entre à T_{2e} et sort à T_{2s}.

Deux modes de fonctionnement sont réalisables :

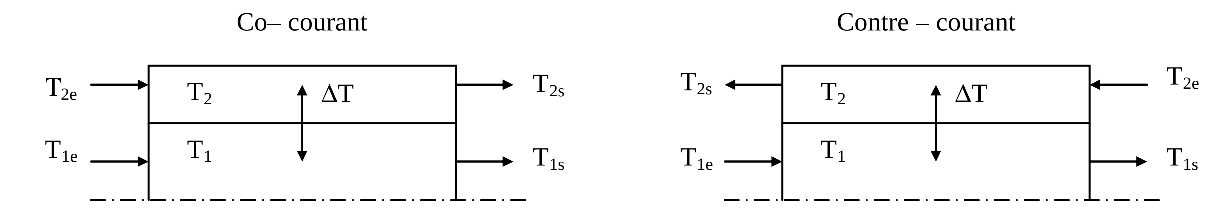


Figure 6.2 : Schématisation des fonctionnements à co-courant et à contre-courant

6.1.2 Expression du flux échangé

6.1.2.1 Coefficient global de transfert

Une première expression du flux de chaleur transféré dans un échangeur peut être déterminée en écrivant qu'il est égal au flux de chaleur perdu par le fluide chaud et au flux de chaleur gagné par le fluide froid pendant leur traversée de l'échangeur :

$$\varphi = \dot{m}_1\, c_{p1}\, \left(T_{1s} - T_{1e}\right) = \dot{m}_2\, c_{p2}\, \left(T_{2e} - T_{2s}\right)$$

Les produits $q_{c1} = \dot{m}_1\, c_{p_1}$ et $q_{c2} = \dot{m}_2\, c_{p2}$ sont appelés les <u>débits calorifiques</u> des deux fluides.

Le flux de chaleur peut donc finalement s'écrire :

$$\boxed{\varphi = q_{c1}\, \left(T_{1e} - T_{1s}\right) = q_{c2}\, \left(T_{2s} - T_{2e}\right)} \qquad (6.1)$$

Par ailleurs, le flux de chaleur φ transmis d'un fluide 1 à un fluide 2 à travers la paroi d'un tube cylindrique s'écrit :

$$\varphi = \frac{\Delta T}{\dfrac{1}{2\pi\, h_1\, r_1\, L} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\, \lambda\, L} + \dfrac{1}{2\pi\, h_2\, r_2\, L}}$$

Dans les échangeurs de chaleur, on choisit de rapporter le flux de chaleur échangé à la surface $S_2 = 2\pi\, r_2\, L$, soit d'écrire : $\varphi = h\, S_2\, \Delta\theta$. Le coefficient global de transfert h d'un échangeur de chaleur s'écrit donc :

$$\boxed{h = \left(\frac{r_2}{h_1\, r_1} + \frac{r_2\, \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda} + \frac{1}{h_2} + R_{en}\right)^{-1}} \qquad (6.2)$$

R_{en} est une résistance thermique due à l'encrassement des surfaces d'échange dont il faut tenir compte après quelques mois de fonctionnement (entartrage, dépôts, corrosion,…).

On trouvera dans le tableau ci-dessous les ordres de grandeur de h pour des échangeurs tubulaires en verre et métallique.

Tableau 6.1 : Ordres de grandeur du coefficient global de transfert h de divers types d'échangeurs

	Coefficient global de transfert h (W m^{-2} °C^{-1})
Liquide-liquide	100-2000
Liquide-gaz	30-300
Condenseur	500-5000

6.1.2.2 Cas où h est constant

<u>Fonctionnement à co-courant</u>

Il faut d'abord établir la relation liant le flux de chaleur transmis dans l'échangeur au coefficient global de transfert h et à la surface extérieure S_2 d'échange. Cette relation est fondamentale car elle permet de dimensionner un échangeur, c'est à dire de calculer la surface d'échange nécessaire pour transférer un flux imposé.

Pour cela, on effectue un bilan thermique de la partie d'échangeur comprise entre les distances x et x + dx de l'entrée de l'échangeur :

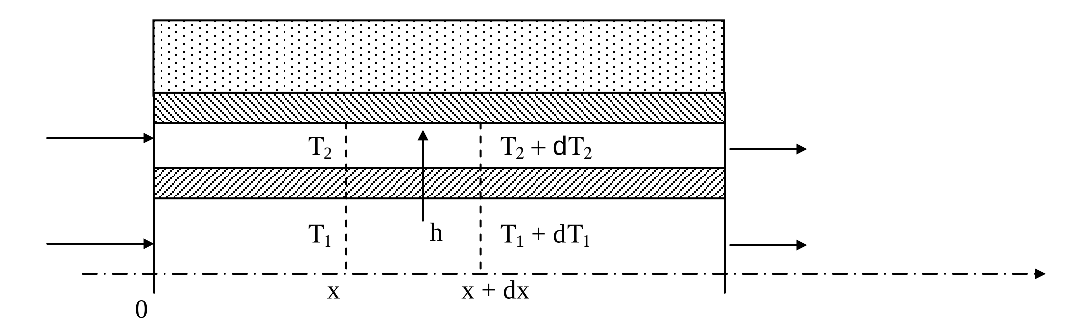


Figure 6.3 : Schéma des flux élémentaires dans un échangeur tubulaire simple

Le bilan thermique consiste à écrire que le flux de chaleur perdu par le fluide chaud lors de son passage entre les plans d'abscisse x et x + dx est passé intégralement à travers la paroi de séparation des deux fluides soit :

$$-q_{c1}\,dT_1 = h\,dS_2\,(T_1 - T_2)$$

L'équation du bilan thermique s'écrit : $\dfrac{dT_1}{T_1 - T_2} = -\dfrac{h\,dS_2}{q_{c1}}$

T_2 dépend de T_1 donc avant d'intégrer, il faut établir la relation liant ces deux grandeurs. Pour cela, on effectue le bilan thermique de l'échangeur entre l'entrée de l'échangeur et l'abscisse x en écrivant que le flux de chaleur perdu par le fluide chaud a été intégralement récupéré par le fluide froid soit :

$$q_{c1}\left(T_{1e} - T_1\right) = q_{c2}\left(T_2 - T_{2e}\right) \quad \text{d'où} \quad T_2 = T_{2e} + \frac{q_{c1}}{q_{c2}}\left(T_{1e} - T_1\right)$$

Nous pouvons alors écrire en intégrant sur la surface totale d'échange S_2 :

$$-\int_0^{S_2} \frac{h\,dS_2}{q_{c1}} = \int_{T_{1e}}^{T_{1s}} \frac{dT_1}{T_1 - \frac{q_{c1}}{q_{c2}}(T_{1e} - T_1) - T_{2e}} = \int_{T_{1e}}^{T_{1s}} \frac{dT_1}{\left(1 + \frac{q_{c1}}{q_{c2}}\right) T_1 - \left(\frac{q_{c1}}{q_{c2}} T_{1e} + T_{2e}\right)}$$

D'où : $-\dfrac{h\,S_2}{q_{c1}} = \dfrac{1}{1 + \frac{q_{c1}}{q_{c2}}} \ln\left[\left(1 + \dfrac{q_{c1}}{q_{c2}}\right) T_1 - \left(\dfrac{q_{c1}}{q_{c2}} T_{1e} + T_{2e}\right)\right]_{T_{1e}}^{T_{1s}}$

Soit :

$$-\frac{h\,S_2}{q_{c1}} = \frac{1}{1 + \frac{q_{c1}}{q_{c2}}} \left\{ \ln\left[\left(1 + \frac{q_{c1}}{q_{c2}}\right) T_{1s} - \left(\frac{q_{c1}}{q_{c2}} T_{1e} + T_{2e}\right)\right] - \ln\left[\underbrace{\left(1 + \frac{q_{c1}}{q_{c2}}\right) T_{1e} - \left(\frac{q_{c1}}{q_{c2}} T_{1e} + T_{2e}\right)}_{T_{1e} - T_{2e}}\right] \right\}$$

L'écriture du bilan thermique global entre l'entrée et la sortie de l'échangeur :

$$\varphi = q_{c1}\left(T_{1e} - T_{1s}\right) = q_{c2}\left(T_{2s} - T_{2e}\right)$$

Permet d'écrire : $\dfrac{q_{c1}}{q_{c2}} T_{1e} + T_{2e} = \dfrac{q_{c1}}{q_{c2}} T_{1s} + T_{2s}$

En reportant dans l'équation intégrée, il vient : $-\dfrac{h\,S_2}{q_{c1}} = \dfrac{1}{1 + \frac{q_{c1}}{q_{c2}}} \ln\left(\dfrac{T_{1s} - T_{2s}}{T_{1e} - T_{2e}}\right)$

On peut également exprimer $\dfrac{1}{1+\dfrac{q_{c1}}{q_{c2}}}$ en fonction des températures des fluides :

$$\frac{1}{1+\dfrac{q_{c1}}{q_{c2}}}=\frac{1}{1+\dfrac{T_{2s}-T_{2e}}{T_{1e}-T_{1s}}}=\frac{T_{1e}-T_{1s}}{T_{1e}-T_{1s}+T_{1s}-T_{2e}}$$

D'où la relation : $-\dfrac{h\,S_2}{q_{c1}}=\dfrac{T_{1e}-T_{1s}}{T_{1e}-T_{1s}+T_{2s}-T_{2e}}\ln\left(\dfrac{T_{1s}-T_{2s}}{T_{1e}-T_{2e}}\right)$

T_{1e} - T_{2e} qui représente l'écart de température entre le fluide chaud et le fluide froid à l'entrée de l'échangeur peut être noté : $\Delta T_e = T_{1e} - T_{2e}$, on écrira de même à la sortie de l'échangeur : $\Delta T_s = T_{1s} - T_{2s}$.

L'expression précédente peut alors se mettre sous la forme : $q_{c1}\left(T_{1e}-T_{1s}\right)=h\,S_2\,\dfrac{\Delta T_s-\Delta T_e}{\ln\left(\dfrac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)}$

Le premier membre de cette équation représente le flux de chaleur total φ transféré dans l'échangeur.

Le rapport : $\dfrac{\Delta T_s-\Delta T_e}{\ln\left(\dfrac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)}$ est la moyenne logarithmique (MLDT) de l'écart ΔT entre l'entrée et la sortie de l'échangeur.

Le flux de chaleur échangé se met donc finalement sous la forme :

$$\varphi = h\,S_2\,\Delta T_m \qquad (6.3)$$

Avec :

$$\Delta T_m=\frac{\Delta T_s-\Delta T_e}{\ln\left(\dfrac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)} \qquad (6.4)$$

La distribution des températures des fluides le long de l'échangeur présente l'allure suivante :

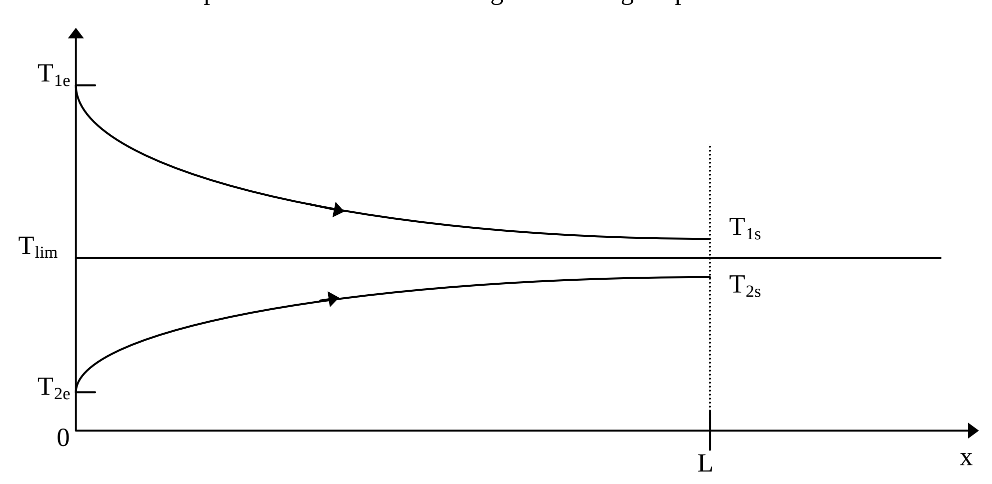


Figure 6.4 : Evolution des températures dans un échangeur tubulaire fonctionnant à co-courant

Remarques :

- En aucun cas on ne peut avoir $T_{2s} > T_{1s}$ car à partir de l'abscisse où les deux fluides seraient à la même température il n'y aurait plus d'échange de chaleur possible.
- Les deux fluides voient leurs températures se rapprocher d'une température limite T_{lim}, cette température est donnée par :

$$T_{lim} = \frac{q_{c1}\ T_{1e} + q_{c2}\ T_{2e}}{q_{c1} + q_{c2}} \qquad (6.5)$$

Fonctionnement à contre-courant

On montre que la relation (6.3) s'applique aussi bien à un échange à contre-courant qu'à un échange à co-courant, mais les expressions de ΔT_s et de ΔT_e ne sont pas identiques dans les deux cas :

Co-courant	Contre-courant
$\Delta T_s = T_{1s} - T_{2s}$	$\Delta T_s = T_{1s} - T_{2e}$
$\Delta T_e = T_{1e} - T_{2e}$	$\Delta T_e = T_{1e} - T_{2s}$

(6.6)

La distribution des températures dans un échangeur à contre-courant présente l'une des allures suivantes :

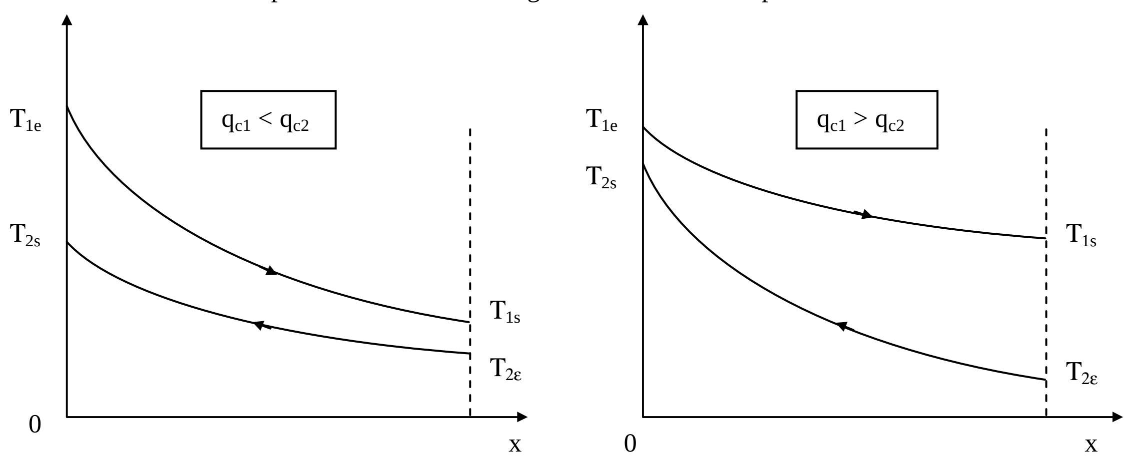


Figure 6.5 : Evolution des températures dans un échangeur tubulaire fonctionnant à contre-courant

$q_{c1} < q_{c2}$: On dit que le fluide chaud commande le transfert. Si $L \to \infty$ alors $T_{1s} \to T_{2e}$ et $T_{2s} \neq T_{1e}$

$q_{c1} > q_{c2}$: On dit que le fluide froid commande le transfert. Si $L \to \infty$ alors $T_{2s} \to T_{1e}$ et $T_{1s} \neq T_{2e}$

Remarque :

- Dans un fonctionnement à contre-courant il est possible d'obtenir $T_{2s} > T_{1s}$
- Il est par contre impossible d'obtenir $T_{2s} > T_{1e}$ ou $T_{1s} < T_{2e}$.

Comparaison des deux modes de fonctionnement

Dans un échangeur tubulaire simple, le flux de chaleur transféré est toujours plus élevé avec un fonctionnement à contre-courant car ΔT_m est plus élevé.

Exemple : T_{1e} = 90°C T_{1s} = 35°C
T_{2e} = 20°C T_{2s} = 30°C

Co-courant : $$\Delta T_m = \frac{(90-20)-(35-30)}{\ln\left(\frac{90-20}{35-30}\right)} = 24{,}6\ °C$$

Contre-courant : $$\Delta T_m = \frac{(90-30)-(35-30)}{\ln\left(\frac{90-30}{35-30}\right)} = 32{,}5\ °C$$

A chaque fois que cela sera possible on choisira donc un fonctionnement à contre-courant.
Plus généralement, un échangeur de chaleur de configuration quelconque aura des performances toujours supérieures à celles de l'échangeur tubulaire simple en co-courant et inférieures à celles d'un échangeur tubulaire simple en contre-courant.

6.1.2.3 Cas où h n'est pas constant

On utilise dans ce cas la méthode de Colburn qui fait l'hypothèse que le coefficient global de transfert h varie linéairement en fonction de ΔT : $h = a + b\,\Delta T$.

Nous pouvons écrire :
- A l'entrée de l'échangeur : $h_e = a + b\,\Delta T_e$
- A la sortie de l'échangeur : $h_s = a + b\,\Delta T_s$

Les coefficients a et b s'expriment par : $b = \frac{h_e - h_s}{\Delta T_e - \Delta T_s}$ et $a = h_e - \frac{h_e - h_s}{\Delta T_e - \Delta T_s}\,\Delta T_e$

Le bilan thermique de l'échangeur entre les abscisses x et x + dx s'écrit toujours :

$$-q_{c1}\,dT_1 = h\,dS_2\,(T_1 - T_2) \quad \text{soit} \quad \frac{dT_1}{T_1 - T_2} = -\frac{h\,dS_2}{q_{c1}}$$

Le calcul de $\int_{T_{1e}}^{T_{1s}} \frac{dT_1}{h(T_1 - T_2)}$ après avoir exprimé h et T_2 en fonction de T_1 conduit au résultat final suivant :

$$\varphi = \frac{h_e\,\Delta T_s - h_s\,\Delta T_e}{\ln\left(\frac{h_e\,\Delta T_s}{h_s\,\Delta T_e}\right)}\,S_2 \qquad (6.7)$$

<u>Remarque</u> : Dans le cas où h ne varie pas linéairement sur tout l'échangeur, on découpera celui-ci en autant de morceaux sur lesquels on pourra faire l'hypothèse d'une variation linéaire de h.

6.1.3 Efficacité d'un échangeur

6.1.3.1 Définition et calcul

On définit l'efficacité d'un échangeur comme le rapport du flux de chaleur effectivement transféré dans l'échangeur au flux de chaleur maximal qui serait transféré dans les mêmes conditions de températures d'entrée des deux fluides dans un échangeur tubulaire de longueur infinie fonctionnant à contre-courant :

$$\eta = \frac{\varphi}{\varphi_{max}} \qquad (6.8)$$

<u>Cas où $q_{c1} < q_{c2}$, le fluide chaud commande le transfert :</u>

Si $L \to \infty$ alors $T_{1s} \to T_{2e}$ d'où : $\varphi_{max} = q_{c1}\left(T_{1e} - T_{2e}\right)$ et $\varphi = q_{c1}\left(T_{1e} - T_{1s}\right)$

On définit alors une efficacité de refroidissement :

$$\eta_r = \frac{T_{1e} - T_{1s}}{T_{1e} - T_{2e}} \tag{6.9}$$

<u>Cas où $q_{c2} < q_{c1}$, le fluide froid commande le transfert :</u>

Si $L \to \infty$ alors $T_{2s} \to T_{1e}$ d'où : $\varphi_{max} = q_{c2}\left(T_{1e} - T_{2e}\right)$ et $\varphi = q_{c2}\left(T_{2s} - T_{2e}\right)$

On définit alors une efficacité de chauffage :

$$\eta_c = \frac{T_{2s} - T_{2e}}{T_{1e} - T_{2e}} \tag{6.10}$$

6.1.3.2 Signification du rendement

Lorsque le but recherché par l'installation d'un échangeur est de récupérer de la chaleur, la notion de rendement prend toute sa justification du point de vue économique. Considérons l'exemple le plus simple d'un échangeur fonctionnant à co-courant destiné à récupérer de la chaleur sur des fumées. Appelons P le prix en € du mètre carré d'échangeur (supposé constant) et C le gain en € par W récupéré sur le fluide chaud.

Le gain total engendré par l'échangeur est : $G = C \cdot \varphi = C\, q_{c1} (T_{1e} - T_{1s})$

Le coût de l'échangeur est supposé proportionnel à sa surface : $D = S \cdot P$ où S est la surface d'échange en m^2. Le bénéfice généré par l'installation de l'échangeur s'écrit : $B = G – D$. Ces différentes grandeurs sont représentées schématiquement sur la figure 6.6.

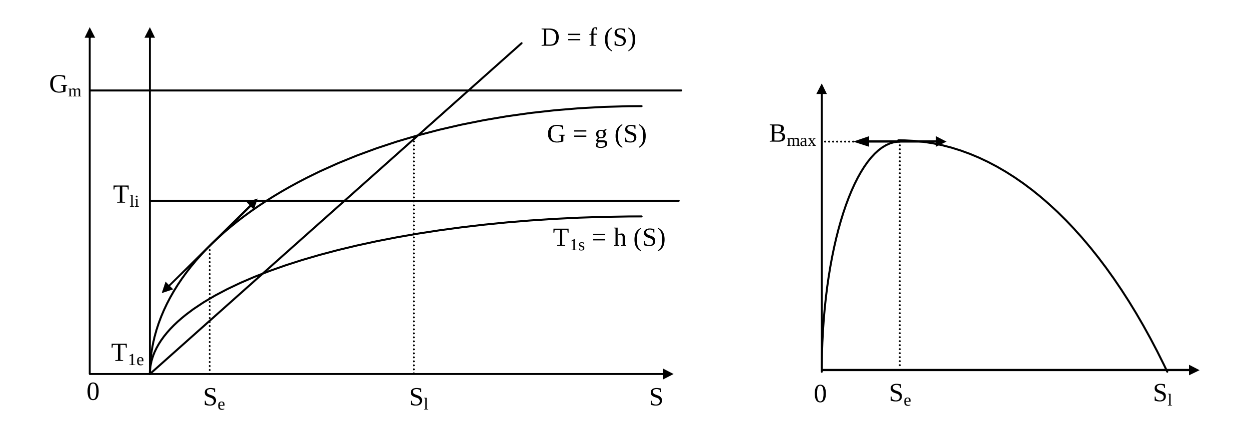


Figure 6.6 : Représentation simplifiée du bénéfice engendré par un récupérateur de chaleur.

On constate que le bénéfice atteint un maximum pour une certaine valeur S_e de la surface d'échange. L'augmentation de la surface d'échange au-delà de S_e permet d'augmenter le rendement mais a un effet inverse sur le bénéfice. Il existe donc une limite économique S_e pour la surface d'échange de ce type d'échangeur de chaleur.

6.1.4 Nombre d'unités de transfert

6.1.4.1 Définition

On appelle nombre d'unité de transfert noté NUT le rapport adimensionnel $\frac{h\,S_2}{q_{c1}}$ qui est aussi égal à $\frac{T_{1e} - T_{1s}}{\Delta T_m}$ pour le fluide chaud dans le cas d'un échangeur tubulaire simple :

$$\boxed{NUT_1 = \frac{h\,S_2}{q_{c1}} = \frac{T_{1e} - T_{1s}}{\Delta T_m}} \qquad (6.11)$$

Le NUT est représentatif du pouvoir d'échange de l'échangeur. Nous allons montrer dans ce qui suit qu'il est lié à l'efficacité de l'échangeur et que son utilisation permet de simplifier les calculs de dimensionnement des échangeurs.

6.1.4.2 Relation entre NUT et efficacité

Considérons le cas d'un échangeur tubulaire simple fonctionnant à contre-courant et supposons que le fluide chaud commande le transfert : $q_{c1} < q_{c2}$ donc $\eta_r = \dfrac{T_{1e} - T_{1s}}{T_{1e} - T_{2e}}$

Posons $z = \dfrac{q_{c1}}{q_{c2}} < 1$ et $\Delta T_{max} = T_{1e} - T_{2e}$

$$NUT_1 = \frac{h\,S_2}{q_{c1}} = \frac{T_{1e} - T_{1s}}{\Delta T_s - \Delta T_e}\ln\left(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)$$

Exprimons ΔT_e et ΔT_s en fonction de ΔT_{max} et η_r, nous pouvons écrire :

$$\Delta T_s = T_{1s} - T_{2e} = T_{1s} - T_{1e} + T_{1e} - T_{2e} = -\eta_r\,\Delta T_{max} + \Delta T_{max} = \Delta T_{max}\,(1-\eta_r)$$

$$\Delta T_e = T_{1e} - T_{2s} = T_{1e} - T_{2e} + T_{2e} - T_{2s} = \Delta T_{max} - z\,(T_{1e} - T_{1s}) = \Delta T_{max}\,(1 - z\,\eta_r)$$

Nous en déduisons l'expression du NUT_1 en fonction de ΔT_{max} et de η_r :

$$NUT_1 = \frac{\Delta T_{max}\,\eta_r}{\Delta T_{max}\,(1-\eta_r) - \Delta T_{max}\,((1 - z\,\eta_r))}\ln\left[\frac{\Delta T_{max}\,(1-\eta_r)}{\Delta T_{max}\,(1 - z\,\eta_r)}\right] = \frac{1}{1-z}\ln\left(\frac{1 - z\,\eta_r}{1-\eta_r}\right)$$

En reprenant ce calcul dans le cas où le fluide froid commande le transfert puis pour un fonctionnement à co-courant nous obtenons les relations générales suivantes :

<u>Co-courant</u>	<u>Contre-courant</u>	
$NUT_{max} = \dfrac{-\ln[1-(1+z)\eta]}{1+z}$	$NUT_{max} = \dfrac{1}{z-1}\ln\left(\dfrac{\eta - 1}{z\eta - 1}\right)$	(6.12)
$\eta = \dfrac{1 - \exp\,[-NUT_{max}\,(1+z)]}{1+z}$	$\eta = \dfrac{1 - \exp[-NUT_{max}\,(1-z)]}{1 - z\exp[-NUT_{max}\,(1-z)]}$	

Avec : $NUT_{max} = \dfrac{h\,S}{q_{cmin}}$ et $z = \dfrac{q_{cmin}}{q_{cmax}}$

<u>Cas particuliers</u> :

- Pour tous les types d'échangeurs : $\eta = 1 - \exp(-NUT_{max})$ et $NUT_{max} = -\ln(1-\eta)$ si z = 0.
- Pour l'échangeur à contre-courant : $\eta = \dfrac{NUT_{max}}{NUT_{max} + 1}$ et $NUT_{max} = \dfrac{\eta}{1-\eta}$ si z = 1.

L'utilisation de ces formules a permis d'établir les abaques présentées en annexe A.6.1.

6.1.5 Calcul d'un échangeur

6.1.5.1 Températures de sorties connues

Le coefficient global de transfert h ayant été calculé, on connaît : q_{c1}, q_{c2}, T_{1e}, T_{1s}, T_{2e} et T_{2s}. On peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes pour calculer S_2 :

Méthode MLDT :

- On calcule $\varphi = q_{c1}\,(T_{1e} - T_{1s}) = q_{c2}\,(T_{2s} - T_{2e})$
- On calcule $\Delta T_m = \dfrac{\Delta T_s - \Delta T_e}{\ln\left(\dfrac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)}$
- On en déduit $S_2 = \dfrac{\varphi}{h\,\Delta T_m}$

Méthode du NUT :

- On calcule η et $z = \dfrac{q_{cmin}}{q_{cmax}}$
- On détermine NUT_{max} par utilisation des formules (6.12) ou des abaques
- On en déduit $S_2 = NUT_{max}\,\dfrac{q_{cmin}}{h}$

6.1.5.2 Températures de sortie inconnues

Le coefficient global de transfert h ayant été calculé, on connaît : q_{c1}, q_{c2}, T_{1e}, T_{2e} et S. On peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes pour calculer T_{1s} et T_{2s} :

Méthode MLDT :

Son application nécessite la résolution (complexe) par des méthodes numériques du système de deux équations :

$$q_{c1}\,(T_{e1} - T_{1s}) = h\,S\,\Delta T_m$$

$$q_{c1}\,(T_{1e} - T_{1s}) = q_{c2}\,(T_{2s} - T_{2e})$$

Méthode du NUT :

- On calcule $NUT_{max} = \dfrac{h\,S}{q_{cmin}}$ et $z = \dfrac{q_{cmin}}{q_{cmax}}$
- On détermine η par utilisation des formules (6.12) ou des abaques. Dans l'expression de η ne figure qu'une seule température inconnue T_{1s} ou T_{2s} que l'on calcule.
- On détermine la deuxième température inconnue par le bilan thermique global de l'échangeur :

$$q_{c1}\,(T_{1e} - T_{1s}) = q_{c2}\,(T_{2s} - T_{2e})$$

Remarque : La méthode du NUT qui s'applique directement sans avoir recours à des méthodes numériques complexes est à préférer dans ce cas de figure.

6.2 Les échangeurs à faisceaux complexes

6.2.1 Généralités

Nous avons jusqu'alors étudié le modèle le plus simple d'échangeur que l'on puisse concevoir à savoir l'échangeur tubulaire simple. Il est toutefois difficile avec ce type d'échangeur d'obtenir des surfaces d'échange

importantes sans aboutir à des appareils très encombrants. C'est l'une des raisons qui a conduit à développer d'autres géométries d'échanges.

6.2.2 Echangeur 1-2

C'est l'échangeur à faisceau le plus simple : le fluide circulant dans l'enveloppe effectue un seul passage tandis que le fluide circulant dans le tube effectue 2 (ou 2n) passages :

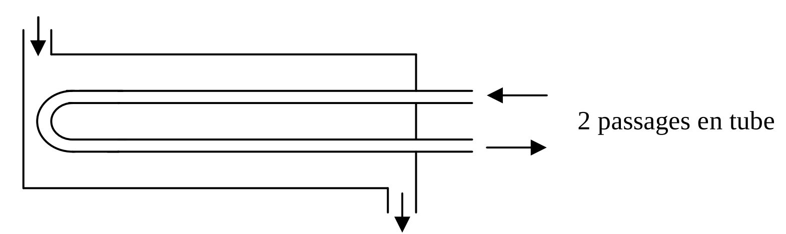


Figure 6.7 : Schéma d'un échangeur 1-2

Une passe en tube s'effectue à co-courant avec l'écoulement en calandre tandis que l'autre s'effectue à contre-courant (cf. figure 6.7). L'écoulement co-courant est moins efficace que l'écoulement à contre-courant, l'échangeur 1-2 a donc une efficacité comprise entre celle d'un échangeur tubulaire fonctionnant à co-courant et celle d'un échangeur tubulaire fonctionnant à contre-courant.

Comme pour l'échangeur tubulaire simple, il existe une relation reliant le nombre d'unités de transfert maximal NUT_{max} et l'efficacité η de l'échangeur :

$$NUT_{max} = -\left(1+z^2\right)^{-1/2} \ln\left[\frac{2/\eta - 1 - z - \left(1+z^2\right)^{1/2}}{2/\eta - 1 - z + \left(1+z^2\right)^{1/2}}\right]$$

$$\eta = 2\left\{1 + z + \left(1+z^2\right)^{1/2} \frac{1+\exp\left[-NUT_{max}\left(1+z^2\right)^{1/2}\right]}{1-\exp\left[-NUT_{max}\left(1+z^2\right)^{1/2}\right]}\right\}^{-1} \tag{6.13}$$

On trouvera également en annexe A.6.1 les abaques établis à partir de cette relation. Le calcul d'un échangeur 1-2 s'effectue en appliquant la méthode du NUT telle qu'elle a été décrite pour les échangeurs tubulaires simples.

6.2.3 Echangeur 2-4

Lorsque l'échangeur 1-2 ne permet pas d'obtenir une efficacité supérieure à 0,75, on cherche à se rapprocher davantage de l'échangeur à contre-courant en effectuant 2 (ou plus) passages en calandre. L'échangeur 2-4 comporte une chicane longitudinale de sorte que le fluide en enveloppe effectue 2 passages. Le fluide dans le tube effectue 4 (ou 4n) passages (cf. figure 6.8).

Comme pour l'échangeur tubulaire simple, il existe une relation reliant le nombre d'unités de transfert maximal NUT_{max} et l'efficacité η de l'échangeur :

$$\eta_{2-4} = \frac{\left[(1-\eta_{1-2}\, z)\,(1-\eta_{1-2})^2\right] - 1}{\left[(1-\eta_{1-2}\, z)\,(1-\eta_{1-2})^2\right] - z} \tag{6.14}$$

Où : η_{1-2} est le rendement de l'échangeur 1-2 fonctionnant dans les mêmes conditions donné par la relation (6.13).

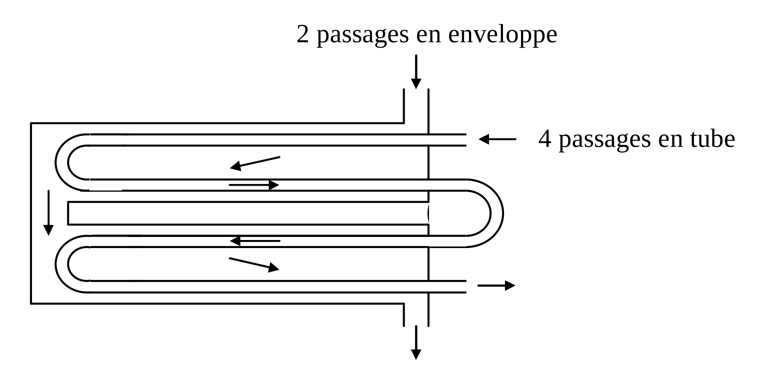


Figure 6.8 : Schéma d'un échangeur 2-4

On trouvera également en annexe A.6.1 les abaques établis à partir de cette relation. Le calcul d'un échangeur 1-2 s'effectue en appliquant la méthode du NUT telle qu'elle a été décrite pour les échangeurs tubulaires simples.

6.2.4 Echangeur à courants croisés

Les deux fluides s'écoulent perpendiculairement l'un à l'autre. Un fluide est dit non brassé s'il s'écoule dans une veine divisée en plusieurs canaux parallèles distincts et de faible section, il est dit brassé dans le cas contraire. Le brassage a pour effet d'homogénéiser les températures dans la section droite de la veine. Les échangeurs à courants croisés sont surtout utilisés pour des échangeurs entre un gaz circulant en calandre et un liquide circulant dans les tubes.

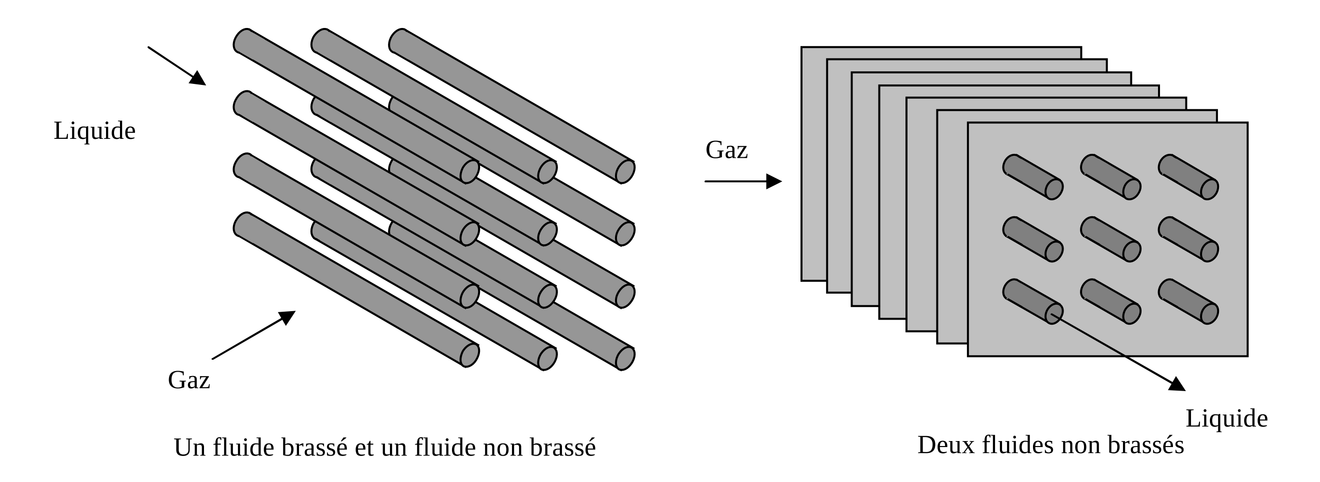


Figure 6.9 : Schéma de deux types d'échangeurs à courants croisés

Comme pour l'échangeur tubulaire simple, il existe une relation reliant le nombre d'unités de transfert maximal NUT_{max} et l'efficacité η de l'échangeur :

<u>Deux fluides non brassés :</u>

$$\eta = 1 - \exp\left[\frac{\exp\left(-z\ NUT_{max}^{0,78}\right) - 1}{z\ NUT_{max}^{-0,22}}\right] \qquad (6.15)$$

<u>Deux fluides brassés :</u>

$$\eta = \left[\frac{1}{1 - \exp\left(-\mathrm{NUT_{max}}\right)} + \frac{z}{1 - \exp\left(-\mathrm{NUT_{max}}\ z\right)} - \frac{1}{\mathrm{NUT_{max}}} \right]^{-1} \tag{6.16}$$

$$\mathrm{NUT_{max}} = -\ln\left[1 + \frac{1}{z}\ln\left(1 - \eta\ z\right)\right]$$

<u>Un fluide non brassé :</u>

Fluide commandant le transfert ($q_{c\ min}$) non brassé :

$$\eta = \frac{1}{z}\left\{1 - \exp\left[-z\left(1 - e^{-\mathrm{NUT_{max}}}\right)\right]\right\} \tag{6.17}$$

$$\mathrm{NUT_{max}} = -\ln\left[1 + \frac{1}{z}\ln\left(1 - \eta\ z\right)\right]$$

Fluide commandant le transfert ($q_{c\ min}$) brassé :

$$\eta = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{1}{z}\right)\left[1 - \exp\left(-z\ \mathrm{NUT_{max}}\right)\right]\right\} \tag{6.18}$$

$$\mathrm{NUT_{max}} = -\frac{1}{z}\ln\left[1 + z\ln\left(1 - \eta\right)\right]$$

Le calcul d'un échangeur à courants croisés s'effectue en appliquant la méthode du NUT telle qu'elle a été décrite pour les échangeurs tubulaires simples. On trouvera en annexe A.6.1 des abaques représentant ces différentes formules.

6.2.5 Echangeurs frigorifiques

Une installation frigorifique comporte au moins deux échangeurs de chaleur :

- Un condenseur dont le but est d'assurer le transfert de chaleur du fluide frigorigène au milieu extérieur
- Un évaporateur dont le rôle est d'assurer le transfert de chaleur du milieu à refroidir au fluide frigorigène.

Ces deux échangeurs se caractérisent par un écoulement diphasique du fluide frigorigène.

6.2.5.1 Condenseurs

Dans un condenseur, la phase liquide du fluide frigorigène apparaît dès que la température de la surface de refroidissement devient inférieure à la température de saturation du fluide frigorigène sous la pression de condensation. Ceci se produit à une distance très faible de l'entrée du condenseur, pratiquement dès le début s'il s'agit d'un condenseur à eau. On peut ainsi observer, quasiment dès l'entrée de l'échangeur, la présence contre la paroi froide d'une mince couche de liquide sur la surface de laquelle un film de vapeur saturée se condense.

On peut dès lors considérer que la température du fluide frigorigène est constante et égale à la température de condensation. Si l'on admet que le coefficient global de transfert h est constant, le profil des températures a l'allure suivante :

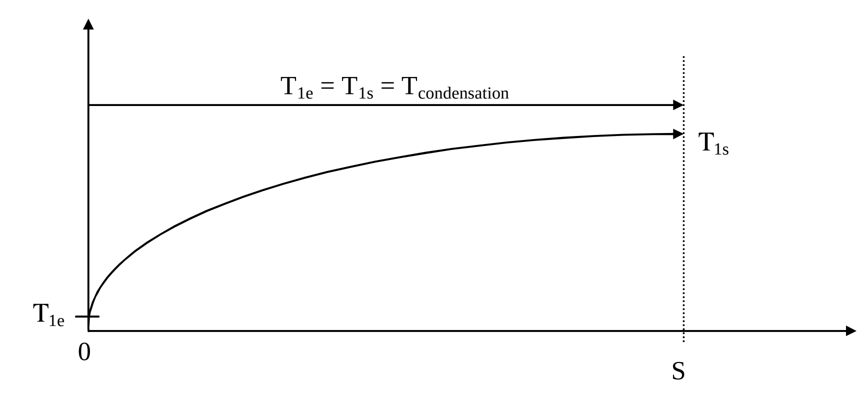


Figure 6.10 : Evolution des températures dans un condenseur

6.2.5.2 Evaporateurs

Noyés

Dans ce type d'échangeur, l'évaporation se produit à l'extérieur des tubes complètement « noyés » dans la phase liquide. Si la perte de charge due à la circulation du fluide frigorigène est négligeable, la température de ce fluide est constante tout au long de l'évaporateur et égale à la température d'évaporation :

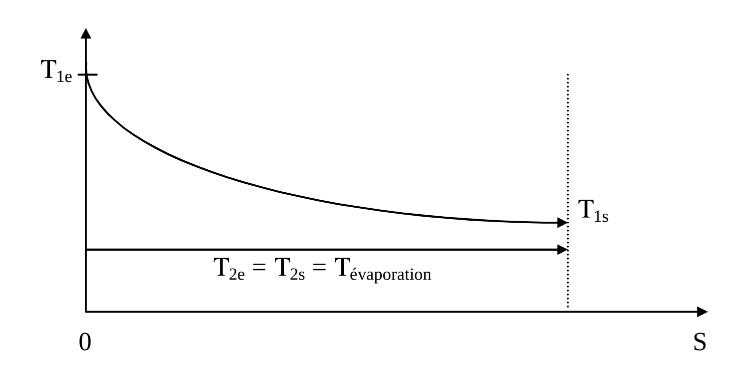


Figure 6.11 : Evolution des températures dans un évaporateur noyé

Comme dans ces échangeurs le titre de vapeur reste en deçà de 75%, le coefficient d'échange est relativement élevé et peut être considéré comme constant. La surface d'échange nécessaire se calcule de la même manière que pour une autre type d'échangeur.

A détente sèche

Dans ce type d'échangeur, l'évaporation se produit à l'intérieur des tubes dans lesquels le fluide frigorigène circule. Du point de vue des transferts thermiques, deux points différencient ces évaporateurs des précédents :

- Pour éviter tout risque que du fluide liquide pénètre dans le compresseur, les vapeurs sont légèrement surchauffées ce qui entraîne une variation de la température du fluide frigorigène dans la partie terminale de l'échangeur.
- Pour les titres de vapeur supérieurs à 75%, le coefficient de transfert côté fluide frigorigène chute brutalement ce qui ne permet plus de considérer le coefficient global de transfert h comme constant.

Pour dimensionner ces échangeurs, il faut les scinder en plusieurs parties telles que le coefficient global de transfert h soit constant ou varie linéairement sur chacune d'elles.

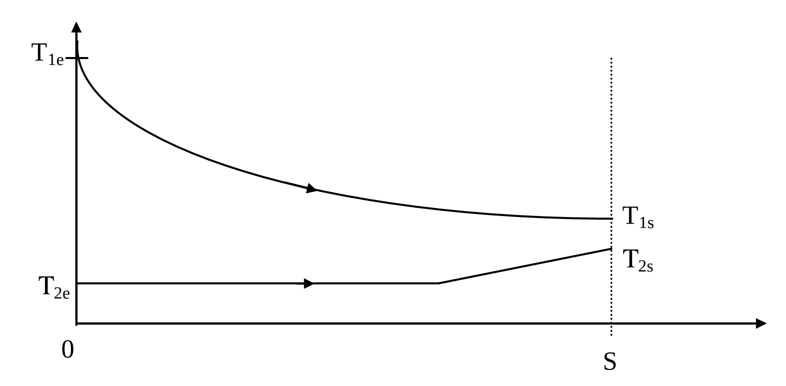


Figure 6.12 : Evolution des températures dans un évaporateur à détente sèche

On trouvera dans le tableau 6.2 l'ordre de grandeur des coefficients globaux d'échanges h dans divers types de condenseurs et d'évaporateurs.

Tableau 6.2 : Ordre de grandeur du coefficient global d'échange pour divers types d'échangeurs frigorifiques (d'après IIF , 1976)

Coefficient global d'échange h pour divers types de condenseurs ($W.m^{-2}.°C^{-1}$)			
Groupe	Médium de condensation	Type	h
A chaleur sensible	Air	Circulation naturelle Circulation forcée	9 à 12 24 à 30
	Eau	Immersion Double tube et contre-courant Multitubulaires horizontaux	240 à 300 700 à 950 700 à 1000
A chaleur latente	Evaporation forcée	Tubes lisses Tubes à ailettes	240 à 350 120 à 180
Coefficient global d'échange pour divers types d'évaporateurs ($W.m^{-2}.°C^{-1}$)			
Refroidisseurs de liquides	A serpentin A immersion		70 à 95 400 à 580
	Double tube et contre-courant		580 à 820
Refroidisseurs de gaz	Plaques eutectiques (eau ou saumure)		35 à 95
	Circulation d'air forcée : Tubes lisses Tubes ailetés		 35 à 47 16 à 24

BIBLIOGRAPHIE

1. Bouvenot A., « Transferts de chaleur », Masson, 1980.
2. Bromley L.A., « Heat transfer in stable film boiling », Trans. ASME, vol. 80, p.711, 1950.
3. Carslaw H.S., Jaeger J.C., « Conduction of heat in solids », Second Edition, Oxford University Press, 1959.
4. Daguenet M., « Les séchoirs solaires : théorie et pratique », UNESCO, 1985.
5. Degiovanni A. « Diffusivité et méthode flash », Revue Générale de Thermique, n°185, pp. 420-441, 1977.
6. Degiovanni A., Laurent A., « Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode flash », Revue de Physique Appliquée, n° 21, pp. 229-237, 1986.
7. Eyglunent B., « Manuel de thermique. Théorie et pratique », Hermes Science, 2000.
8. Gobbé C., Iserna S., Ladevie B., « Hot strip method : application to thermal characterisation of orthotropic media », International Journal of Thermal Sciences, vol. 23, n°10, pp. 951-958, 2004.
9. Gosse J. , « Guide technique de thermique », Dunod, 1981.
10. IIF, « Les techniques du Froid dans les pays chauds en développement », IIF, 1976.
11. Hay B., Filtz J.R., Batsale J.C., « Mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash », Technique de l'ingénieur, R2 995, 2002.
12. Hladik J., « Métrologie des propriétés thermophysiques des matériaux », Masson, 1990.
13. Holman J.P., « Heat transfer », seventh edition, Mac Graw Hill, 1990.
14. Huet O, Celaire R., « Bioclimatisme en zone tropicale », GRET, 1986.
15. Jannot Y., Meukam P., «Simplified estimation method for the determination of thermal effusivity and thermal conductivity with a low cost hot strip», Measurement Science and Technology, vol. 15, pp. 1932-1938, 2004.
16. Jannot Y., Acem Z., Kanmogne A., «Transient hot plate method with two temperature measurements for thermal characterization of metals», Measurement Science and Technology, vol.17, pp. 69-74, 2006.
17. Ladevie B., «Mise au point de dispositifs de caractérisation thermophysique de matériaux isolants solides ou pâteux , extension aux fluides cisaillés», Thèse doctorat ENSAM, Bordeaux, 1998.
18. Maillet D., André A., Batsale J.-C., Degiovanni A., Moyne C., « Thermal quadrupoles », John Wiley & Sons Ltd, 2000.
19. Meukam P., « Caractérisation de matériaux locaux en vue de l'isolation thermique de bâtiments », Thèse de doctorat, Université de Cergy-Pontoise, 2004.
20. Özisik M. N., « Heat conduction », John Wiley & Sons, Inc., 1993.
21. Parker W.J., Jenkins R.J., Butler C.P., Abbot G.L., « Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity », Journal of Applied Physics, vol. 32, n°9, pp. 1679-1684, 1961.
22. Philipon A., « Echanges thermiques », Ecole d'Ingénieurs de l'Equipement Rural, Ouagadougou, 1988.
23. Pitts D. R., Sissom L. E., « Theory and problems of heat transfer », Schaum's Outline Series, 1977.
24. Rohsenow W. M., Hartnett J. P., Ganic E. N., « Handbook of heat transfer fundamentals », Mac Graw Hill, 1985.
25. Sacudura J.-F., « Initiation aux transferts thermiques », Technique et documentation, Lavoisier, 1989.
26. Siegel R., Howell J. R., « Thermal radiation heat transfer », 1992.
27. Spiegel M. R., « Transformées de Laplace, cours et problèmes », Schaum, 1990.
28. Sparrow E.M., Cess R.D., « Radiation heat transfer », Mac Graw Hill, 1978.
29. Stehfest H., « Algorithm 368, Numerical inversion of Laplace transforms », Comm. ACM, 13, pp. 47-49.
30. Taine J., Petit J.-P., « Transferts thermiques, cours et données de base », Dunod, 1995.
31. Whitaker S., « Fundamental principles of heat transfer », Robert E. Krieger Publishing Company Inc., 1983.
32. Wong H.Y., « Heat transfer for engineers », Longman, 1977.
33. Zuber N., "On the stability of boiling heat transfer", Trans. ASME, vol. 80, p.711, 1958.

ANNEXES

A.1.1 : Propriétés physiques de certains corps

	ρ kg m^{-3}	c_p J kg^{-1}°C^{-1}	λ W m^{-1}°C^{-1}
Métaux et alliages			
Acier au carbone	7833	465	54
Acier inox 15%Cr, 10%Ni	7864	460	20
Acier inox 18%Cr, 8%Ni	7816	460	16,3
Acier inox 25%Cr, 20%Ni	7864	460	13
Alumine			29
Aluminium	2707	896	204
Argent	10525	234	407
Bronze 75%Cu, 25%Sn	8800	377	188
Bronze 92%Cu, 8%Al	7900	377	71
Carbone graphite	2250	707	147
Carbure de silicium			13
Chrome	2118	7160	449
Constantan 60% Cu, 40%Ni	8922	410	22,7
Cuivre	8954	383	386
Cupronickel 70%Cu, 30%Ni	8900	377	29,3
Duralumin	2787	883	164
Etain	7304	226	64
Fer	7870	452	73
Fonte	7849	460	59
Laiton 70%Cu, 30%Zn	8522	385	111
Magnésium	1740	1004	151
Or	19300	128	312
Platine	21400	140	69
Plomb	11373	130	35
Sodium liquide	930	1381	84,5
Titane	4500	523	20,9
Tungstène	19350	134	163
Zinc	7144	384	112
Matériaux divers			
Amiante	575	1046	0,15
Asphalte	2115	920	0,062
Caoutchouc (naturel)	1150		0,28
Caoutchouc (vulcanisé)	1100	2010	0,13
Carton	86	2030	0,048
Cuir	998		0,159
Glace	920	2040	1,88
Plexiglass	1190	1465	0,19
Porcelaine	2400	1088	1,035
Polyéthylène	929	1830	0,46
PVC	1459	930	0,21
Sable	1515	800	0,2-1,0
Téflon	2170	1004	0,25
Terre mouillée	1900	2000	2
Terre sèche	1500	1900	1
Verre	2300	837	1,05
Verre Pyrex	2220	728	1,13

	ρ kg m^{-3}	c_p J kg^{-1}°C^{-1}	λ W m^{-1}°C^{-1}
Matériaux de construction			
Ardoise	2400	879	2,2
Basalte	2850	881	1,6
Béton caverneux	1900	879	1,4
Béton plein	2300	878	1,75
Bitume (cartonné)	1050	1305	0,23
Bois feuillus légers	525	3143	0,15
Bois feuillus mi-lourds	675	3156	0,23
Bois feuillus très légers	375	3147	0,12
Bois résineux légers	375	3147	0,12
Bois résineux mi-lourds	500	3160	0,15
Bois résineux très légers	375	3147	0,12
Brique terre cuite	1800	878	1,15
Calcaire dur	2450	882	2,4
Calcaire tendre	1650	879	1
Carrelage	2400	875	2,4
Contre-plaqué okoumé	400	3000	0,12
Contre-plaqué pin	500	3000	0,15
Granite	2600	881	3
Gravier (vrac)	1800	889	0,7
Grès	2500	880	2,6
Lave	2350	881	1,1
Marbre	2700	881	2,5
Plâtre	1440	840	0,48
Schiste	2400	879	2,2
Matériaux isolants			
Balsa	140		0,054
Coton	80	1300	0,06
Kapok			0,035
Laine de roche	20	880	0,047
	55	880	0,038
	135	880	0,041
Laine de verre	8	875	0,051
	10	880	0,045
	15	880	0,041
	40	880	0,035
Liège expansé	120	2100	0,044
Moquette	200	1300	0,06
Polyuréthane (mousse)	32	1300	0,03
	50	1360	0,035
	85	1300	0,045
PVC (mousse rigide)	30	1300	0,031
	40	1300	0,041
Polystyrène expansé	12	1300	0,047
	14	1300	0,043
	18	1300	0,041
Styrofoam	30		0,032

A.1.1 : Propriétés physiques de l'air et de l'eau

Propriétés de l'eau à saturation

θ	ρ	c_p	λ	10^4. μ	10^7. a	Pr
°C	kg.m^{-3}	J.kg^{-1}.°C^{-1}	W.m^{-1}.°C^{-1}	Pa.s^{-1}	m^2.s^{-1}	
0	1002	4218	0,552	17,90	1,31	13,06
20	1001	4182	0,597	10,10	1,43	7,02
40	995	4178	0,628	6,55	1,51	4,34
60	985	4184	0,651	4,71	1,55	3,02
80	974	4196	0,668	3,55	1,64	2,22
100	960	4216	0,680	2,82	1,68	1,74
120	945	4250	0,685	2,33	1,71	1,45
140	928	4283	0,684	1,99	1,72	1,24
160	910	4342	0,680	1,73	1,73	1,10
180	889	4417	0,675	1,54	1,72	1,00
200	867	4505	0,665	1,39	1,71	0,94
220	842	4610	0,652	1,26	1,68	0,89
240	816	4756	0,635	1,17	1,64	0,88
260	786	4949	0,611	1,08	1,58	0,87
280	753	5208	0,580	1,02	1,48	0,91
300	714	5728	0,540	0,96	1,32	1,02

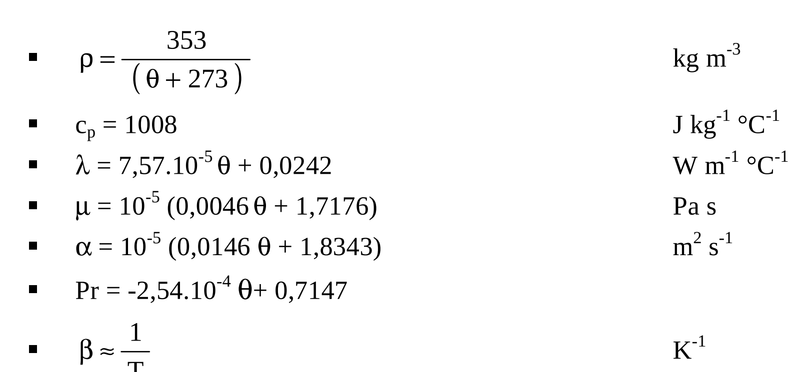
Propriétés de l'air à 1 atm

θ	ρ	c_p	λ	10^5. μ	10^5. a	Pr
°C	kg.m^{-3}	J.kg^{-1}.°C^{-1}	W.m^{-1}.°C^{-1}	Pa.s^{-1}	m^2.s^{-1}	
0	1,292	1006	0,0242	1,72	1,86	0,72
20	1,204	1006	0,0257	1,81	2,12	0,71
40	1,127	1007	0,0272	1,90	2,40	0,70
60	1,059	1008	0,0287	1,99	2,69	0,70
80	0,999	1010	0,0302	2,09	3,00	0,70
100	0,946	1012	0,0318	2,18	3,32	0,69
120	0,898	1014	0,0333	2,27	3,66	0,69
140	0,854	1016	0,0345	2,34	3,98	0,69
160	0,815	1019	0,0359	2,42	4,32	0,69
180	0,779	1022	0,0372	2,50	4,67	0,69
200	0,746	1025	0,0386	2,57	5,05	0,68
220	0,700	1028	0,0399	2,64	5,43	0,68
240	0,688	1032	0,0412	2,72	5,80	0,68
260	0,662	1036	0,0425	2,79	6,20	0,68
280	0,638	1040	0,0437	2,86	6,59	0,68
300	0,616	1045	0,0450	2,93	6,99	0,68

Corrélations entre 0 et 100 °C

(θ : température en °C , T température en K)

Pour l'air



- $\rho = \dfrac{353}{(\theta + 273)}$ kg m^{-3}
- $c_p = 1008$ J kg^{-1} °C^{-1}
- $\lambda = 7{,}57.10^{-5}\,\theta + 0{,}0242$ W m^{-1} °C^{-1}
- $\mu = 10^{-5}\,(0{,}0046\,\theta + 1{,}7176)$ Pa s
- $\alpha = 10^{-5}\,(0{,}0146\,\theta + 1{,}8343)$ m^2 s^{-1}
- $Pr = -2{,}54.10^{-4}\,\theta + 0{,}7147$
- $\beta \approx \dfrac{1}{T}$ K^{-1}

Pour l'eau

- $\rho = -0{,}00380\,\theta^2 - 0{,}0505\,\theta + 1002{,}6$ kg m^{-3}
- $c_p = 4180$ J kg^{-1} °C^{-1}
- $\lambda = -9{,}87.10^{-6}\,\theta^2 + 2{,}238.10^{-3}\,\theta + 0{,}5536$ W m^{-1} °C^{-1}
- $\mu = 10^{-4}\,\dfrac{17{,}9 - 0{,}07377\,\theta + 0{,}0003354\,\theta^2}{1 + 0{,}03032\,\theta + 8{,}765.10^{-5}\,\theta^2}$ Pa.s
- $a = 10^{-7}\,(-0{,}00360\,\theta + 1{,}340)$ m^2 s^{-1}
- $Pr = \dfrac{13{,}06 + 1{,}387\,\theta - 0{,}0037\,\theta^2}{1 + 0{,}12407\,\theta + 0{,}005297\,\theta^2}$
- $\dfrac{g\,\beta\,\rho^2\,c_p}{\mu\,\lambda} = \left(0{,}0105\,\theta^2 + 0{,}477\,\theta - 0{,}0363\right) 10^9$ °C^{-1} m^{-3}
- $\log_{10}\left[p_{sat}(T)\right] = 20{,}3182 - \dfrac{2795}{T} - 3.868\,\log_{10}(T)$ mmHg -50°C < θ > 200°C

- $L_v = 2495 - 2{,}346\ \theta$ kJ.kg^{-1} $0°C < \theta < 100°C$

A.2.1 : Valeur du coefficient de forme de conduction

Système	Schéma	Coefficient de forme	Domaine d'application
Cylindre isotherme de rayon r enterré dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$\dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{D}{r}\right)}$	L>>r
Sphère isotherme de rayon r enterrée dans un milieu infini		$4\pi r$	
Sphère isotherme enterrée dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$\dfrac{4\pi r}{1-\dfrac{r}{2D}}$	
Conduction entre 2 cylindres isothermes enterré dans un milieu infini		$\dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{D^2-r_1^{\,2}-r_2^{\,2}}{2r_1 r_2}\right)}$	L>>r L>>D
Cylindre horizontal au centre dans une plaque infinie		$\dfrac{2\pi L}{\ln\left(\dfrac{4D}{r}\right)}$	
Cylindre isotherme de rayon r placé dans un milieu semi-infini		$\dfrac{2\pi L}{\ln\left(\dfrac{2L}{r}\right)}$	L>>2r
Parallélépipède rectangle isotherme enterré dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$1.685L\left[\log\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\right]^{-0.59}\left(\dfrac{b}{c}\right)^{-0.078}$	
Cylindre au centre d'un parallélépipède de section carrée		$\dfrac{2\pi L}{\ln\left(0.54\dfrac{h}{r}\right)}$	L>>W
Plaque rectangulaire mince enterrée dans milieu semi-infini à surface isotherme		4r 8r	D = 0 D>>2r
Sphère creuse		$\dfrac{4\pi r_o r_i}{r_o - r_i}$	

A.2.2 : Efficacité des ailettes

Hypothèse : Flux nul à l'extrémité de l'ailette, vérifié si $\sqrt{\dfrac{h\,e}{\lambda}} \ll 1$ (d'après Whitaker, 1983).

Ailette droite	Rectangulaire $y = e$	2e, y, x, L	$\eta = \dfrac{1}{\omega L}\,\mathrm{th}(\omega L)$ avec $\omega = \sqrt{\dfrac{h}{\lambda\, e}}$
	Parabolique $y = e\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$	2e	$\eta = \dfrac{1}{\omega L}\,\dfrac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}\,\omega L\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}\,\omega L\right)}$
	Triangulaire $y = e\left(1-\dfrac{x}{L}\right)$	2e	$\eta = \dfrac{1}{\omega L}\,\dfrac{I_1(2\,\omega L)}{I_0(2\,\omega L)}$
	Parabolique $y = e\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^{2}$	2e	$\eta = \dfrac{2}{\sqrt{4\,(\omega L)^2+1}+1}$
Ailette circulaire	Rectangulaire $y = e$	2e, L, r_0, r_1	$\eta = \dfrac{2}{\omega L\left(\dfrac{r_1}{r_0}+1\right)}\,\dfrac{I_1(\omega r_0)K_1(\omega r_1)-I_1(\omega r_1)K_1(\omega r_0)}{I_0(\omega r_0)K_1(\omega r_1)-I_1(\omega r_1)K_0(\omega r_0)}$
Aiguilles (section droite circulaire)	Rectangulaire $y = e$	2e, y, x, L	$\eta = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\omega L}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{2}\,\omega L\right)$
	Parabolique $y = e\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$	2e	$\eta = \dfrac{3}{2\sqrt{2}\,\omega L}\,\dfrac{I_1\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\,\omega L\right)}{I_0\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\,\omega L\right)}$
	Triangulaire $y = e\left(1-\dfrac{x}{L}\right)$	2e	$\eta = \dfrac{\sqrt{2}}{\omega L}\,\dfrac{I_2\left(2\sqrt{2}\,\omega L\right)}{I_1\left(2\sqrt{2}\,\omega L\right)}$
	Parabolique $y = e\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^{2}$	2e	$\eta = \dfrac{2}{\sqrt{\frac{8}{9}(\omega L)^2+1}+1}$

A.2.3 : Equations et fonctions de Bessel

Equations particulières de Bessel et leurs solutions

$$y''+\frac{y'}{x}+m^2\ y=0 \quad \Rightarrow \quad y=k_1\ J_0(m\,x)+k_2\ Y_0(mx)$$

$$x^2\ y''+x\,y'+\left(x^2-n^2\right)y=0 \quad \Rightarrow \quad y=k_1\ J_n(x)+k_2\ Y_n(x) \quad \text{(n entier)}$$

$$y''+\frac{y'}{x}-m^2\ y=0 \quad \Rightarrow \quad y=k_1 I_0(m\,x)+k_2\ K_0(m\,x)$$

$$x^2\ y''+x\,y'-\left(x^2+n^2\right)y=0 \quad \Rightarrow \quad y=k_1\ I_n(x)+k_2\ K_n(x)$$

J_n Fonction de Bessel de 1ère espèce non modifiée d’ordre n
I_n Fonction de Bessel de 1ère espèce modifiée d’ordre n
Y_n Fonction de Bessel de 2ème espèce non modifiée d’ordre n
K_n Fonction de Bessel de 2ème espèce modifiée d’ordre n.

(cf. Özisik, 1993, pour la définition des fonctions de Bessel).

Principales propriétés des fonctions de Bessel

Récurrence

$$J_{n+1}(u)=-J_{n-1}(u)+\frac{2\,n}{u}J_n(u) \qquad Y_{n+1}(u)=-Y_{n-1}(u)+\frac{2\,n}{u}Y_n(u)$$

$$I_{n+1}(u)=I_{n-1}(u)-\frac{2\,n}{u}I_n(u) \qquad K_{n+1}(u)=K_{n-1}(u)-\frac{2\,n}{u}K_n(u)$$

Dérivée

$$\frac{dJ_0(u)}{du}=-J_1(u) \quad ; \quad \frac{d[u\,J_1(u)]}{du}=u\,J_0(u) \quad ; \quad \frac{dI_0(u)}{du}=I_1(u) \quad ; \quad \frac{dK_0(u)}{du}=-K_1(u) \quad ; \quad \frac{dY_0(u)}{du}=-Y_1(u)$$

Limites des fonctions de Bessel d’ordre 0 et 1

Si $u \to 0$:

$J_0(u) \to 1$ $J_1(u) \to 0$ $Y_0(u) \to -\infty$ $Y_1(u) \to -\infty$
$I_0(u) \to 1$ $I_1(u) \to 0$ $K_0(u) \to +\infty$ $K_1(u) \to +\infty$

Si $u \to \infty$

$J_0(u) \to 0$ $J_1(u) \to 0$ $Y_0(u) \to 0$ $Y_1(u) \to 0$
$I_0(u) \to +\infty$ $I_1(u) \to +\infty$ $K_0(u) \to 0$ $K_1(u) \to 0$

Comportement asymptotique des fonctions de Bessel d’ordre 0 et 1

Si $u \to 0$:

$J_0(u) \to 1$ $J_1(u) \to u/2$ $Y_0(u) \to (2/\pi)\ln(u)$ $Y_1(u) \to 2/\pi u$
$I_0(u) \to 1$ $I_1(u) \to u/2$ $K_0(u) \to -\ln(u)$ $K_1(u) \to 1/u$

Si $u \to \infty$

$$J_0(u) \to \sqrt{2/\pi u}\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right) \qquad J_1(u) \to \sqrt{2/\pi u}\cos\left(u-\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad Y_0(u) \to \sqrt{2/\pi u}\sin\left(u-\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_1(u) \to \sqrt{2/\pi u}\sin\left(u-\frac{\pi}{4}\right) \qquad I_0(u), I_1(u) \to \sqrt{2/\pi u}\exp(u) \qquad K_0(u), K_1(u) \to \sqrt{\pi/2u}\exp(-u)$$

A.2.3 : Fonctions et équations de Bessel

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0	1,0000	0,0000	□	□
0,1	1,0025	0,0501	2,427	9,849
0,2	1,01	0,1005	1,753	4,775
0,3	1,0226	0,1517	1,373	3,057
0,4	1,0404	0,204	1,115	2,185
0,5	1,0635	0,2579	0,924	1,656
0,6	1,092	0,3137	0,778	1,302
0,7	1,1263	0,3719	0,660	1,051
0,8	1,1665	0,4329	0,565	0,862
0,9	1,213	0,4971	0,487	0,716
1,0	1,2661	0,5652	0,421	0,602
1,1	1,3262	0,6375	0,366	0,509
1,2	1,3937	0,7147	0,319	0,435
1,3	1,4693	0,7973	0,278	0,372
1,4	1,5534	0,8861	0,243	0,320
1,5	1,6467	0,9817	0,214	0,278
1,6	1,75	1,0848	0,188	0,240
1,7	1,864	1,1963	0,165	0,209
1,8	1,9896	1,3172	0,146	0,182
1,9	2,1277	1,4482	0,129	0,160
2,0	2,28	1,591	0,113	0,140
2,1	2,446	1,746	0,101	0,123
2,2	2,629	1,914	0,090	0,108
2,3	2,83	2,098	0,079	0,094
2,4	3,049	2,298	0,071	0,083
2,5	3,29	2,517	0,063	0,074
2,6	3,553	2,755	0,055	0,066
2,7	3,842	3,016	0,049	0,058
2,8	4,157	3,301	0,044	0,050
2,9	4,503	3,613	0,039	0,046

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
3,0	4,881	3,953	0,035	0,041
3,1	5,294	4,326	0,031	0,036
3,2	5,747	4,734	0,028	0,031
3,3	6,243	5,181	0,025	0,028
3,4	6,785	5,67	0,022	0,025
3,5	7,378	6,206	0,019	0,022
3,6	8,028	6,793	0,017	0,020
3,7	8,739	7,436	0,016	0,017
3,8	9,517	8,14	0,014	0,016
3,9	10,369	8,913	0,013	0,014
4,0	11,3	9,76		
4,1	12,32	10,69		
4,2	13,44	11,71		
4,3	14,67	12,82		
4,4	16,01	14,05		
4,5	17,48	15,39		
4,6	19,09	16,86		
4,7	20,86	18,48		
4,8	22,79	20,25		
4,9	24,91	22,2		
5,0	27,24	24,34		
5,1	29,79	26,68		
5,2	32,58	29,25		
5,3	35,65	32,08		
5,4	39,01	35,18		
5,5	42,7	38,59		
5,6	46,74	42,33		
5,7	51,17	46,44		
5,8	56,04	50,95		
5,9	61,38	55,9		

A.3.1 : Principales transformations intégrales : Laplace, Fourier, Hankel

Transformée de Laplace

Définition

$$L[T(t)] = \theta(p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\,t)\,T(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad L^{-1}[\theta(p)] = T(t) \qquad \text{(Transformée inverse)}$$

Propriétés

Linéarité $\quad L[a_1\,T(t) + a_2\,T(t)] = a_1\,L[T(t)] + a_2\,L[T(t)]$, idem pour L^{-1}

Translation $\quad L[\exp(a\,t)\,T(t)] = \theta(p-a) \qquad L^{-1}[\theta(p-a)] = \exp(a\,t)\,T(t)$

$$L^{-1}[\exp(-a\,p)\,\theta(p)] = T(t-a) \quad \text{si} \quad t > a$$
$$0 \quad \text{si} \quad t < a$$

Changement d'échelle $\quad L[T(a\,t)] = \dfrac{1}{a}\,\theta\left(\dfrac{p}{a}\right) \qquad L^{-1}[\theta(a\,p)] = \dfrac{1}{a}\,T\left(\dfrac{t}{a}\right)$

Dérivation $\quad L[T'(t)] = p\,\theta(p) - T(0) \qquad L^{-1}\left[\theta^{(n)}(p)\right] = (-1)^n\ t^n\,T(t)$

$$L[T''(t)] = p^2\,\theta(p) - pT(0) - T'(0)$$

Intégration $\quad L\left[\int_0^t T(u)\,du\right] = \dfrac{\theta(p)}{p} \qquad L^{-1}\left[\int_p^{\infty}\theta(u)\,du\right] = \dfrac{F(t)}{t}$

Multiplication par t^n $\quad L\left[t^n\ T(t)\right] = (-1)^n\ \theta^{(n)}(p) \qquad L^{-1}[p\,\theta(p)] = T'(t) - T(0)\,\delta(t)$

Division par t $\quad L\left[\dfrac{T(t)}{t}\right] = \int_p^{\infty}\theta(u)\,du \qquad L^{-1}\left[\dfrac{\theta(p)}{p}\right] = \int_0^t T(u)\,du$

Fonctions périodiques $\quad L[T(t)] = \dfrac{\int_0^P \exp(-p\,t)\,T(t)\,dt}{1-\exp(-p\,P)}$

(Période P)

Transformée de Fourier complexe

Définition

$$F[T(x)] = \theta(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\ T(x)\,dx$$

$$T(x) = F^{-1}[\theta(\omega)] = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\ \theta(\omega)\,d\omega$$

Propriétés

$$F\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = -i\,\omega\,\theta(\omega)$$

$$F\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = -\,\omega^2\ \theta(\omega)$$

A.3.1 Principales transformations intégrales : Laplace, Fourier, Hankel

Transformée de Fourier en sinus et cosinus

Définitions

Sinus

$$F_s[T(x)] = \theta_s(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} T(x)\sin[\omega x]dx$$

$$T(x) = F_s^{-1}[\theta_s(\omega)] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \theta(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega$$

Cosinus

$$F_c[T(x)] = \theta_c(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} T(x)\cos[\omega x]dx$$

$$T(x) = F_c^{-1}[\theta_c(\omega)] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \theta(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$$

Propriétés

$$F_s\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = -\omega\,\theta_c(\omega)$$

$$F_s\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = -\omega^2\,\theta_s(\omega) + \omega\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} T(0)$$

$$F_c\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = -\omega\,\theta_s(\omega) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} T(0)$$

$$F_c\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = -\omega^2\,\theta_c(\omega) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{x=0}$$

Transformée finie de Fourier en sinus et cosinus

Définitions

Si la température T(x) n'est définie que sur l'intervalle [0,L], on peut utiliser une transformation finie de Fourier en sinus ou en cosinus :

$$F_s[T(x)] = \theta_s(n) = \int_0^L T(x)\sin\left[\frac{n\pi x}{L}\right]dx \quad \text{ou} \quad F_c[T(x)] = \theta_c(n) = \int_0^L T(x)\cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right]dx$$

$$T(x) = F_s^{-1}[\theta_s(n)] = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \theta_s(n)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{ou} \quad T(x) = F_c^{-1}[\theta_c(n)] = \frac{1}{L}\,\theta_c(0) + \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty} \theta_c(n)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Propriétés

$$F_s\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = \theta_s(n) = \frac{n\pi}{L}\left[T(0) - (-1)^n\,T(L)\right] - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\theta_s(n)$$

$$F_c\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = \theta_c(n) = (-1)^n\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\theta_c(n)$$

Transformée de Hankel d'ordre v

Définition

Pour v > -1/2 :

$$H_v[T(r)] = \theta_v(\sigma) = \int_0^{\infty} r\,J_v(\sigma r)\,T(r)\,dr \qquad T(x) = H_v^{-1}[\theta_v(\sigma)] = \int_0^{\infty} \sigma\,J_v(\sigma r)\theta_v(\sigma)d\sigma$$

Propriété

$$H_v\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{v^2\,T}{r^2}\right] = -\sigma^2\theta_v(\sigma)$$

; à l'ordre 0 : $H_0[T(r) = T_i] = T_i \int_0^{\infty} r\,J_0(\sigma r)dr = \frac{r}{\sigma}J_1(\sigma r)$

A.3.2 : Transformation de Laplace inverse

Méthode analytique

La transformée de Laplace θ(p) de la fonction T(t) est donnée par : $L[T(t)] = \theta(p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\,t)\,T(t)\,dt$

Il n'existe pas de formule analytique générale permettant de calculer T(t) connaissant θ(p). On connait cependant l'expression exacte de T(t) pour certaines fonctions particulières θ(p), on en trouvera des exemples page suivante (cf. Spiegel pour des tables plus complètes). L'utilisation de ces tables associée aux propriétés particulières de la transformation de Laplace inverse rappelées en annexe A.2.2 peut permettre de résoudre un certain nombre de cas. On essaiera toujours de décomposer une fonction complexe en somme, produit, série… de fonctions simples plus facilement inversibles.

Méthodes numériques

Pour les cas de figure pour lesquels on ne peut pas trouver une solution analytique, on peut employer l'une des deux méthodes numériques suivantes :

Méthode de Stehfest

La transformée inverse de la fonction θ(p) peut se calculer par (Stehfest, 1970):

$$T(t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^{N} V_j\ \theta_i\left(\frac{j\ \ln(2)}{t}\right)$$

N = 20 (double précision) :

$V1 = -5{,}511463844797178.10^{-6}$	$V2 = 1{,}523864638447972.10^{-1}$	$V3 = -1{,}174654761904762.10^{2}$
$V4 = 1{,}734244933862434.10^{4}$	$V5 = -9{,}228069289021164.10^{5}$	$V6 = 2{,}37740877871031810.^{7}$
$V7 = -3{,}494211661953704.10^{8}$	$V8 = 3{,}241369852231879.10^{9}$	$V9 = -2{,}027694830723779.10^{10}$
$V10 = 8{,}946482982379724.10^{10}$	$V11 = -2{,}870209211471027.10^{11}$	$V12 = 6{,}829920102815115.10^{11}$
$V13 = -1{,}219082330054374.10^{12}$	$V14 = 1{,}637573800842013.10^{12}$	$V15 = -1{,}647177486836117.10^{12}$
$V16 = 1{,}221924554444226.10^{12}$	$V17 = -6{,}488065588175326.10^{11}$	$V18 = 2{,}333166532137059.10^{11}$
$V19 = -5{,}091380070546738.10^{10}$	$V20 = 5{,}091380070546738.10^{9}$	

N = 10 (simple précision):

V1 = 1/12	V2 = -385/12	V3 = 1279	V4 = -46871/3	V5 = 505465/6
V6 = -473915/2	V7 = 1127735/3	V8 = -1020215/3	V9 = 328125/2	V10 = -65625/2

Méthode de Fourier

$$T(t) = \frac{\exp(c\,t)}{t_{max}}\left[\frac{\theta(c)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathrm{Re}[\theta(c + j\,\omega_k)]\cos(\omega_k\ t) - \mathrm{Im}[\theta(c + j\,\omega_k)]\sin(\omega_k\ t)\right)\right]$$

Avec $\omega_k = \frac{k\,\pi}{t_{max}}$

La somme infinie est dans la pratique calculée pour un nombre de fini N de termes , on prendra en général N > 100. Cette méthode nécessite de choisir deux paramètres : c et t_{max} . On doit s'assurer a posteriori que $\exp(-2\ c\ t_{max})\ T(2\ t_{max}) \approx 0$.

Choix d'une méthode et vérification des résultats

La méthode de Stehfest est plus simple à mettre en oeuvre car elle ne nécessite pas de choisir certains paramètres. La méthode de Fourier peut conduire à un meilleur résultat dans le cas d'inversion de certaines fonctions comme les fonctions périodiques par exemple (Maillet et al, 2000).

L'étude du comportement de la fonction θ(p) aux temps longs (t→∞ soit p→0) et aux temps courts (t→0 soit p→∞) peut conduire à des formules approchées de θ(p) dont on peut alors trouver la transformée de Laplace inverse analytiquement. La comparaison de ces solutions analytiques avec les résultats de l'inversion numérique donne une indication sur la justesse de l'inversion numérique.

A.3.2 : Transformation de Laplace inverse

$$q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	T(t)
$\frac{1}{p}$	1
1	$\delta(t)$ Dirac
$\frac{1}{p+\beta}$	$e^{-\beta t}$
$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{b}{p\left(b+\sqrt{p}\right)}$	$1-\exp\left(b^2\,t\right)\mathrm{erfc}\left(b\sqrt{t}\right)$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	T(t)
$\frac{\ln(p)}{p}$	$-\ln(t)-\gamma \quad ; \quad \gamma = 0{,}57721$
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\, t}}$
$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}$
$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$\mathrm{sh}(\omega t)$
$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$\mathrm{ch}(\omega t)$
$\frac{1}{p^n} \quad n = 1, 2, 3\ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	T(t)
$e^{-q\,x}$	$\frac{x}{2\sqrt{\pi\, a\, t^3}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\,a\,t}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{q}$	$\left(\frac{a}{\pi\, t}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4a\,t}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{p}$	$\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{pq}$	$2\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - x\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{p^2}$	$\left(t+\frac{x^2}{2a}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - x\left(\frac{t}{\pi a}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{q+h}$	$\left(\frac{a}{\pi t}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - h\,a\,\exp\left(hx+a\,t\,h^2\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}+h\sqrt{at}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{q\,(q+h)}$	$a\,\exp\left(hx+a\,t\,h^2\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}+h\sqrt{at}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{p\,(q+h)}$	$\frac{1}{h}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \frac{1}{h}\exp\left(hx+a\,t\,h^2\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}+h\sqrt{at}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{p\,q\,(q+h)}$	$\frac{2}{h}\left(\frac{a}{\pi t}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \frac{1+h\,x}{h^2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \frac{1}{h^2}\exp\left(hx+a\,t\,h^2\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}+h\sqrt{at}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{(q+h)^2}$	$-2\,h\left(\frac{a^3\,t}{\pi}\right)\exp\left(\frac{-x^2}{2\,a\,t}\right) + a\left(1+h\,x+2\,h^2\,a\,t\right)\exp\left(h\,x+a\,t\,h^2\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}+h\sqrt{at}\right)$

A.3.3 : Choix des transformations intégrales pour différentes configurations

n°	Condition limite x =0	Condition limite x =e	Equation transcendante	Fonctions propres	Norme
Cylindre creux de rayons R_1 et R_2					
1	$\phi = 0$	$\phi = 0$	$J_0(\alpha_n R_1)Y_0(\alpha_n R_2) - Y_0(\alpha_n R_1)J_0(\alpha_n R_2) = 0$	$J_0(\alpha_n r)Y_0(\alpha_n R_2) - Y_0(\alpha_n r)J_0(\alpha_n R_2)$	$\frac{2}{\pi^2}\frac{J_0^2(\alpha_n R_1) - J_0^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n R_1)}$
2	$\phi = 0$	$\frac{d\phi}{dx}=0$	$J_1(\alpha_n R_1)Y_0(\alpha_n R_1) - Y_1(\alpha_n R_2)J_0(\alpha_n R_1) = 0$	$J_1(\alpha_n R_2)Y_0(\alpha_n r) - Y_1(\alpha_n R_2)J_0(\alpha_n r)$	$\frac{2}{\pi^2}\frac{J_0^2(\alpha_n R_1) - J_1^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n R_1)}$
3	$\frac{d\phi}{dx}=0$	$\phi = 0$	$J_0(\alpha_n R_2)Y_1(\alpha_n R_1) - Y_0(\alpha_n R_2)J_1(\alpha_n R_1) = 0$	$J_0(\alpha_n r)Y_1(\alpha_n R_2) - Y_0(\alpha_n r)J_0(\alpha_n R_2)$	$\frac{2}{\pi^2}\frac{J_1^2(\alpha_n R_1) - J_0^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n R_1)}$
4	$\frac{d\phi}{dx}=0$	$\phi = 0$	$J_1(\alpha_n R_1)Y_1(\alpha_n R_2) - Y_1(\alpha_n R_1)J_1(\alpha_n R_2) = 0$	$J_1(\alpha_n R_2)Y_0(\alpha_n r) - Y_1(\alpha_n R_2)J_0(\alpha_n r)$	$\frac{2}{\pi^2}\frac{J_1^2(\alpha_n R_1) - J_1^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n R_1)}$
Cylindre plein de rayon extérieur R					
5		$\phi = 0$	$J_0(\alpha_n R) = 0$	$J_0(\alpha_n R)$	$\frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_n R)$
6		$\frac{d\phi}{dx}=0$	$J_1(\alpha_n R) = 0$	$J_0(\alpha_n R)$	$\frac{R^2}{2} J_0^2(\alpha_n R)$ si $\alpha_n \neq 0$ $\frac{R^2}{2}$ si $\alpha_n = \alpha_0 = 0$

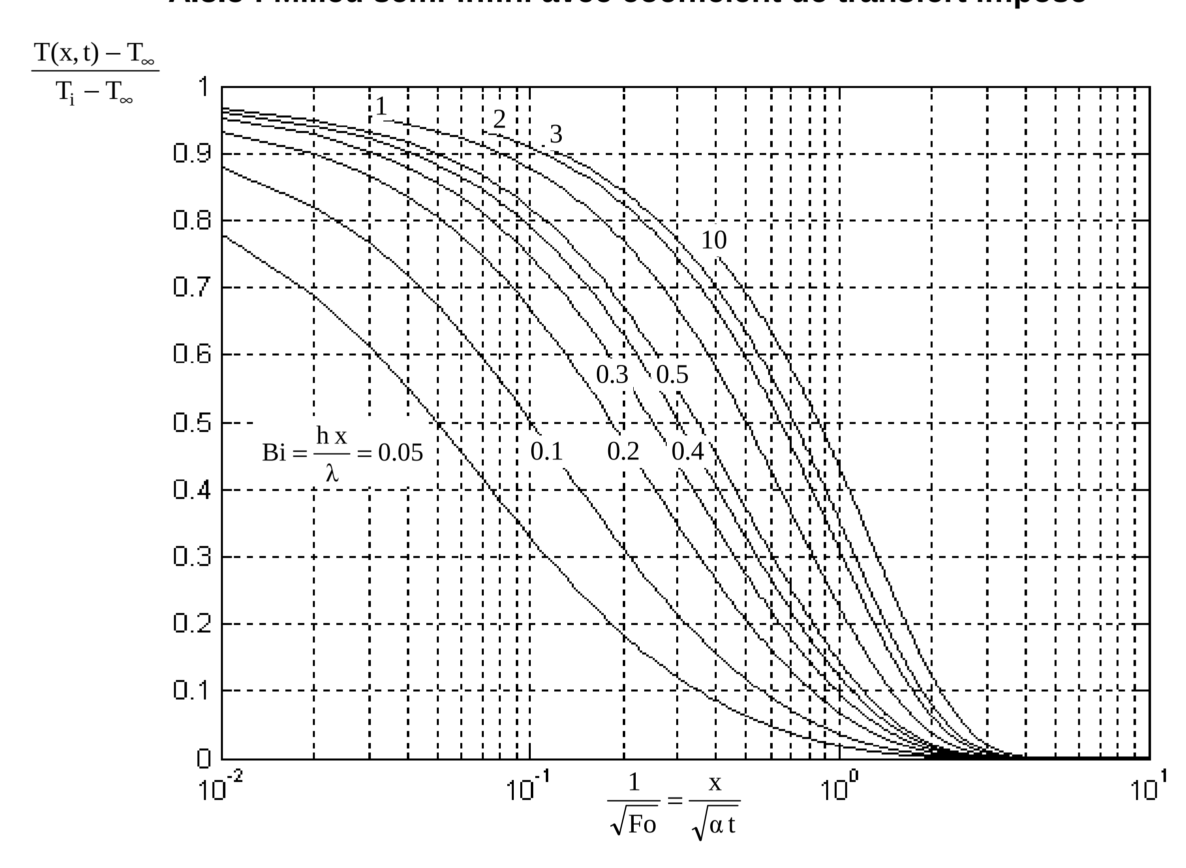
A.3.3 : Choix des transformations intégrales pour différentes configurations

Plaque d'épaisseur e					
n°	**Condition limite x =0**	**Condition limite x =e**	**Valeurs propres**	**Fonctions propres**	**Norme**
1	$\phi = 0$	$\phi = 0$	$n\pi / e$	$\sin(\alpha_n x)$	e/2
2	$\phi = 0$	$\frac{d\phi}{dx}=0$	$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ \pi/e$	$\sin(\alpha_n x)$	e/2
3	$\phi = 0$	$\lambda\frac{d\phi}{dx}+h\phi=0$	Racines positives de $\tan(\alpha_n e) = -\frac{\lambda}{h}\alpha_n$	$\sin(\alpha_n x)$	$\frac{e}{2}\left[1+\frac{h\,e/\lambda}{(h\,e/\lambda)^2+(\alpha_n e)^2}\right]$
4	$\frac{d\phi}{dx}=0$	$\phi = 0$	$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ \pi/e$	$\cos(\alpha_n x)$	e/2
5	$\frac{d\phi}{dx}=0$	$\frac{d\phi}{dx}=0$	$n\pi / e$	$\cos(\alpha_n x)$	e pour n = 0 e/2 pour n = 1, 2,...
6	$\frac{d\phi}{dx}=0$	$\lambda\frac{d\phi}{dx}+h\phi=0$	Racines positives de $\mathrm{cotg}(\alpha_n e) = -\frac{\lambda}{h}\alpha_n$	$\cos(\alpha_n x)$	$\frac{e}{2}\left[1+\frac{h\,e/\lambda}{(h\,e/\lambda)^2+(\alpha_n e)^2}\right]$
7	$-\lambda\frac{d\phi}{dx}+h\phi=0$	$\phi = 0$	Racines positives de $\tan(\alpha_n e) = -\frac{\lambda}{h}\alpha_n$	$\sin[\alpha_n(e-x)]$	$\frac{e}{2}\left[1+\frac{h\,e/\lambda}{(h\,e/\lambda)^2+(\alpha_n e)^2}\right]$
8	$-\lambda\frac{d\phi}{dx}+h\phi=0$	$\frac{d\phi}{dx}=0$	Racines positives de $\mathrm{cot\,g}(\alpha_n e) = \frac{\lambda}{h}\alpha_n$	$\cos[\alpha_n(e-x)]$	$\frac{e}{2}\left[1+\frac{h\,e/\lambda}{(h\,e/\lambda)^2+(\alpha_n e)^2}\right]$
9	$-\lambda\frac{d\phi}{dx}+h_1\phi=0$	$-\lambda\frac{d\phi}{dx}+h_2\phi=0$	Racines positives de $\tan(\alpha_n e) = \frac{\lambda\,\alpha_n\,(h_1+h_2)}{(\lambda\alpha_n)^2-h_1/h_2}$	$\cos(\alpha_n x) + \frac{h_1}{\lambda\,\alpha_n}\sin(\alpha_n x)$	$\frac{1}{2\,e\,\alpha_n^2}\left[\left((h_1\,e/\lambda)^2+(\alpha_n\,e)^2\right)\left(1+\frac{h_2\,e/\lambda}{(h_2\,e/\lambda)^2+(\alpha_n\,e)^2}+\frac{h_1\,e}{\pi}\right)\right]$

A.3.4 : Valeur de la fonction erf

x	erf x	erfc x	ierf x	x	erf x	erfc x	ierf x
0	0,000000	1,000000	0,564190	1,1	0,880205	0,11980	1,760
0,05	0,056372	0,943628	0,518421	1,2	0,910314	0,08969	2,274
0,1	0,112463	0,887537	0,481106	1,3	0,934008	0,06599	2,972
0,15	0,167996	0,832004	0,452227	1,4	0,952285	0,04772	3,939
0,2	0,222703	0,777297	0,431755	1,5	0,966105	0,03390	5,302
0,25	0,276326	0,723674	0,419658	1,6	0,976378	0,02362	7,260
0,3	0,328627	0,671373	0,415910	1,7	0,983790	0,01621	10,124
0,35	0,379382	0,620618	0,420498	1,8	0,989091	0,01091	14,386
0,4	0,428392	0,571608	0,433440	1,9	0,992790	0,00721	20,842
0,45	0,475482	0,524518	0,454795	2	0,995322	0,00468	30,794
0,5	0,520500	0,479500	0,484684	2,1	0,997021	0,00298	46,409
0,55	0,563323	0,436677	0,523311	2,2	0,998137	0,00186	71,349
0,6	0,603856	0,396144	0,570983	2,3	0,998857	0,00114	111,901
0,65	0,642029	0,357971	0,628143	2,4	0,999311	0,00069	179,043
0,7	0,677801	0,322199	0,695397	2,5	0,999593	0,00041	292,257
0,75	0,711156	0,288844	0,773551	2,6	0,999764	0,00024	486,693
0,8	0,742101	0,257899	0,863656	2,7	0,999866	0,00013	826,860
0,85	0,770668	0,229332	0,967059	2,8	0,999925	0,00008	1433,158
0,9	0,796908	0,203092	1,085464	2,9	0,999959	0,00004	2534,205
0,95	0,820891	0,179109	1,221003	3	0,999978	0,00002	4571,677
1	0,842701	0,157299	1,376328				

A.3.5 : Milieu semi-infini avec coefficient de transfert imposé

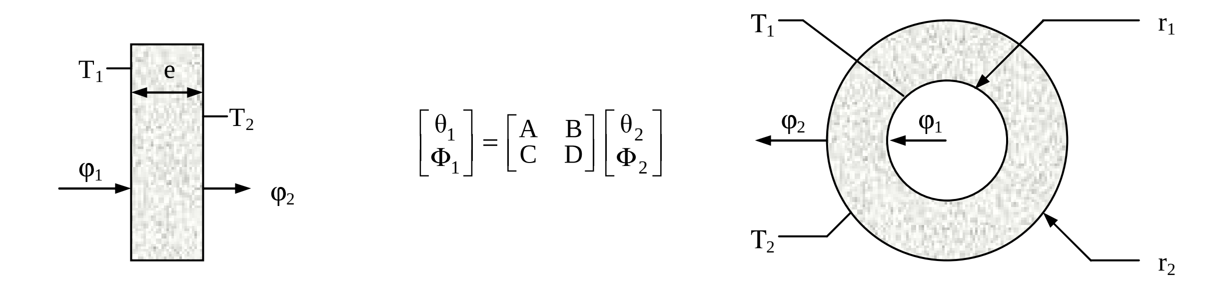


A.3.6 : Matrices quadripolaires pour différentes configurations

$$q = \sqrt{\frac{p}{a}} \quad ; \quad I_0, I_1, K_0, K_1 : \text{Fonctions de Bessel cf. annexe A.2.5.}$$

Quadripôle associé à un transfert unidirectionnel dans un milieu sans génération d'énergie
(Maillet et al, 2000)

Milieu d'épaisseur finie



$$\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \Phi_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & B \\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_2 \\ \Phi_2\end{bmatrix}$$

	Mur plan d'épaisseur e	Cylindre creux de rayons r_1 et r_2	Sphère creuse de rayons r_1 et r_2
A	ch(qe)	$q\, r_2 \left[I_0(q\, r_1)\, K_1(q\, r_2) + I_1(q\, r_2)\, K_0(q\, r_1)\right]$	$\frac{r_2}{r_1}\, ch(p) - \frac{sh(p)}{q\, r_1}$
B	$\frac{sh(q\, e)}{\lambda\, q\, S}$	$\frac{1}{2\pi\lambda L}\left[I_0(q\, r_2)\, K_0(q\, r_1) - I_0(q\, r_1)\, K_0(q\, r_2)\right]$	$\frac{sh(p)}{4\pi\lambda\, q\, r_1\, r_2}$
C	$\lambda\, q\, S\, sh(q\, e)$	$2\pi\lambda L\, q\, r_1\, q\, r_2 \begin{bmatrix} I_1(q\, r_2)\, K_1(q\, r_1) \\ -I_1(q\, r_1)\, K_1(q\, r_2) \end{bmatrix}$	$4\pi\lambda\, r_2 \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) ch(p) \\ + \left(q\, r_1 - \frac{1}{q\, r_2}\, sh(p)\right) \end{bmatrix}$
D	ch(qe)	$q\, r_1 \left[I_0(q\, r_2)\, K_1(q\, r_1) + I_1(q\, r_1)\, K_0(q\, r_2)\right]$	$\frac{r_1}{r_2}\, ch(p) + \frac{sh(p)}{q\, r_2}$

Milieu semi-infini

La transformée de Laplace Φ du flux de chaleur φ s'écrit : $\Phi = \frac{\theta}{Z}$ avec :

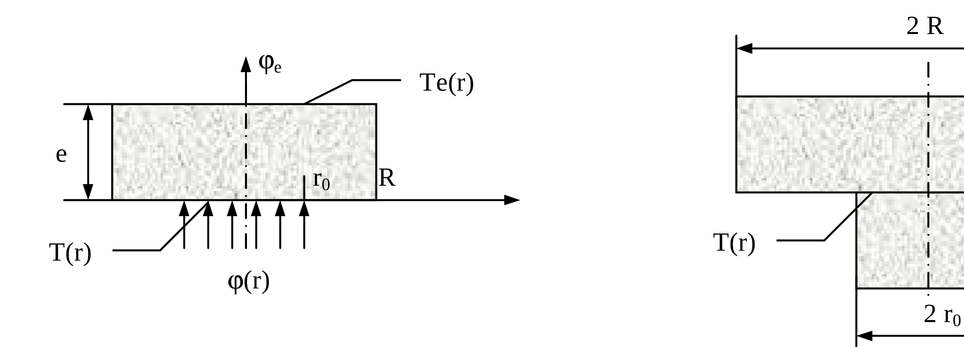
	Mur semi-infini	Cylindre semi-infini de rayon intérieur r_1	Sphère semi-infinie de rayon intérieur r_1
Z	$\frac{1}{S\, E\sqrt{p}}$	$\frac{1}{2\pi\lambda L}\, \frac{K_0(q\, r_1)}{q\, r_1\, K_1(q\, r_1)}$	$\frac{1}{4\pi\lambda\, r_1 (1 + q\, r_1)}$

Où : $E = \sqrt{\lambda \rho c}$ est l'effusivité thermique.

A.3.6 : Matrices quadripolaires pour différentes configurations

Quadripôle associé à une résistance de constriction *(Maillet et al, 2000)*

(variation brusque de la section de passage du flux de chaleur)



Transfert d'un flux φ(r) à la surface d'un cylindre de rayon R et d'épaisseur e, avec φ(r)=0 si r>r₀

	R et e infinis $\Phi = \dfrac{\overline{\theta}_{0-r_0}}{Rc}$		R et e finis $\begin{bmatrix}\theta\\ \Phi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & Rc\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_e\\ \Phi_e\end{bmatrix}$	
	$T(r) = T_0$ pour $r < r_0$	$\varphi(r) = \varphi_0$ pour $r < r_0$	$T_e(r) = T_{e0}$	$\varphi_e(r) = \varphi_{e0}$
Rc	$\dfrac{1}{4\lambda r_0\left(1+\dfrac{\pi}{4} q r_0\right)}$	$\dfrac{8}{3\pi^2 \lambda r_0\left(1+\dfrac{8}{3\pi} q r_0\right)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \, th(\gamma_n e)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{F_n}{th(\gamma_n e)}$

Avec : $A = D = ch(q e)$

$B = \dfrac{1}{\lambda q \pi R^2} sh(q e)$ et : $F_n = \dfrac{4 J_1^2(\alpha_n r_0)}{\lambda S r_0^2 \alpha_n^2 \gamma_n J_0^2(\alpha_n r_0)}$

$C = \lambda q \pi R^2 \, sh(q e)$

avec α_n solution de $J_1(\alpha_n R) = 0$ et $\gamma_n = \alpha_n^2 + \dfrac{p}{a}$

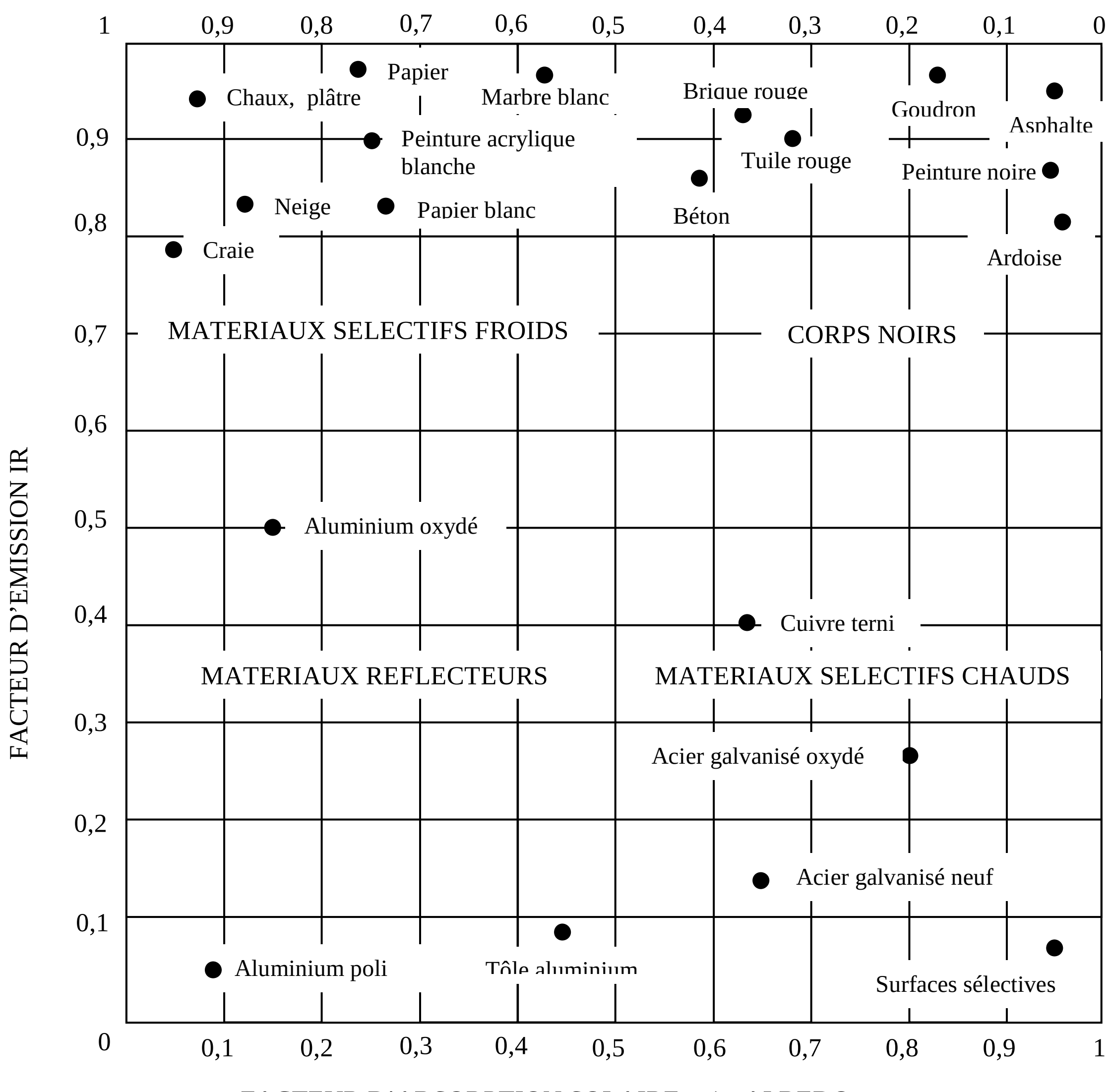
Si $\dfrac{e}{R} > 1$ alors $th(\gamma_n e) = 1$

Quadripôle associé à un transfert unidirectionnel dans un milieu avec génération d'énergie

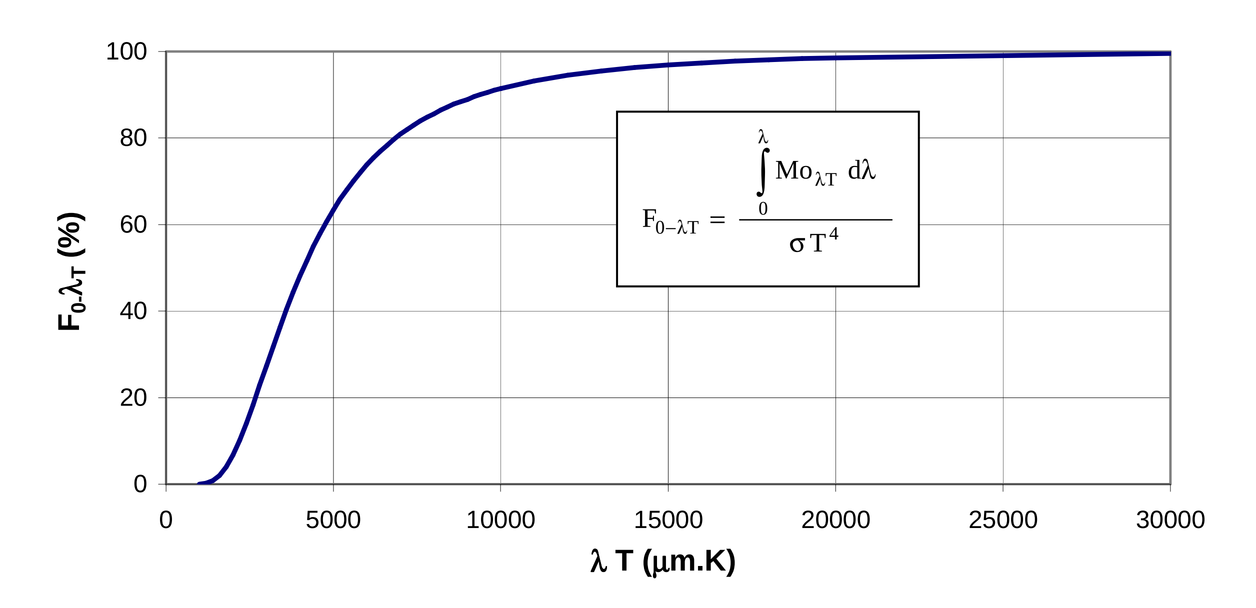
Température considérée = température moyenne de l'élément chauffant

	Plaque d'épaisseur e	Cylindre plein de rayon r	Sphère pleine de rayon r
A	1	1	1
B	$\dfrac{1}{\dfrac{\lambda S}{e} q e \, th(q e)} - \dfrac{1}{\rho c S e p}$	$\dfrac{1}{2\pi\lambda L} \dfrac{I_0(q r)}{I_1(q r)} - \dfrac{1}{\rho c \pi r^2 L p}$	$\dfrac{1}{4\pi\lambda r[q r \, ch(q r) - 1]} - \dfrac{3}{4\rho c \pi r^3 p}$
C	$\rho c S e p$	$\rho c \pi r^2 L p$	$\dfrac{4}{3}\rho c \pi r^3 p$
D	$\dfrac{q e}{th(q e)}$	$\dfrac{q r}{2} \dfrac{I_0(q r)}{I_1(q r)}$	$\dfrac{(q r)^2}{3[q r \, coth(q r) - 1]}$

A.4.1 : Emissivité de certains corps



A.4.2 : Fraction d'énergie $F_{0-\lambda T}$ rayonnée par un corps noir entre 0 et λ



a \ b	0	40	80	120	160
1 000	0,03	0,05	0,08	0,11	0,16
1 200	0,21	0,29	0,38	0,49	0,62
1 400	0,78	0,96	1,17	1,41	1,68
1 600	1,97	2,30	2,66	3,06	3,48
1 800	3,94	4,42	4,94	5,49	6,07
2 000	6,68	7,31	7,97	8,65	9,36
2 200	10,09	10,84	11,61	12,40	13,21
2 400	14,03	14,86	15,71	16,57	17,44
2 600	18,32	19,20	20,09	20,99	21,89
2 800	22,79	23,70	24,61	25,51	26,42
3 000	27,33	28,23	29,13	30,03	30,92
3 200	31,81	32,70	33,58	34,45	35,32
3 400	36,18	37,03	37,88	38,71	39,54
3 600	40,36	41,18	41,98	42,78	43,56
3 800	44,34	45,11	45,87	46,62	47,36
4 000	48,09	48,81	49,53	50,23	50,92
4 200	51,60	52,28	52,94	53,60	54,25
4 400	54,88	55,51	56,13	56,74	57,34
4 600	57,93	58,51	59,09	59,65	60,21
4 800	60,66	61,30	61,83	62,35	62,87
5 000	63,38	63,88	64,37	64,85	65,33
5 200	65,80	66,26	66,72	67,16	67,60
5 400	68,04	68,46	68,88	69,30	69,70
5 600	70,11	70,50	70,89	71,27	71,65
5 800	72,02	72,38	72,74	73,09	73,44
6 000	73,78	74,12	74,45	74,78	75,10
6 200	75,41	75,72	76,03	76,33	76,63
6 400	76,92	77,21	77,49	77,77	78,05
6 600	78,32	78,59	78,85	79,11	79,36
6 800	79,61	79,86	80,10	80,34	80,58
7 000	80,90	81,04	81,26	81,47	81,70
7 200	81,92	82,13	82,34	82,55	82,75
7 400	82,95	83,15	83,34	83,53	83,72
7 600	83,91	84,09	84,27	84,45	84,62

a \ b	0	40	80	120	160
7 800	84,80	84,97	85,14	85,30	85,47
8 000	85,63	85,78	85,94	86,10	86,25
8 200	86,40	86,55	86,69	86,83	86,98
8 400	87,12	87,25	87,39	87,52	87,66
8 600	87,80	87,92	88,04	88,17	88,29
8 800	88,41	88,53	88,65	88,77	88,88
9 000	88,89	89,11	89,22	89,33	89,44
9 200	89,55	89,65	89,76	89,86	89,96
9 400	90,06	90,16	90,26	90,35	90,45
9 600	90,54	90,63	90,72	90,81	90,90
9 800	90,99	91,08	91,16	91,25	91,33
10 000	91,42				

a \ b	0	200	400	600	800
10 000	91,42	91,81	92,19	92,54	92,87
11 000	93,18	93,48	93,76	94,02	94,27
12 000	94,50	94,73	94,94	95,14	95,33
13 000	95,51	95,68	95,84	96,00	96,14
14 000	96,29	96,42	96,54	96,67	96,78
15 000	96,89	97,00	97,10	97,19	97,29
16 000	97,37	97,46	97,54	97,62	97,69
17 000	97,77	97,83	97,90	97,96	98,02
18 000	98,08	98,14	98,19	98,24	98,29
19 000	98,34	98,38	98,43	98,47	98,51
20 000	98,55				
30 000	99,53				
40 000	99,78				
50 000	99,89				
60 000	99,93				
70 000	99,96				
80 000	99,97				
90 000	99,98				
100 000	99,98				

Utilisation :

$\lambda T = a + b$

Exemple : λ□T = 2720 µm,K
se lit à 2600 + 120
d'où : $F_{0-\lambda T}$ = 20,99 %

A.4.3 : Facteurs de forme géométrique de rayonnement

Configuration	Schéma	Valeur du facteur de forme
Surface élémentaire parallèle à un plan rectangulaire	S_1, S_2, a, b, c	$F_{1-2}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{B}{\sqrt{1+B^2}}\tan^{-1}\frac{C}{\sqrt{1+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{1+C^2}}\tan^{-1}\frac{C}{\sqrt{1+C^2}}\right]$ $B=\frac{b}{a} \quad , \quad C=\frac{c}{a}$
Source linéaire parallèle à un plan rectangulaire	S_1, S_2, a, b, c	$F_{1-2}=\frac{1}{\pi B}\left[\sqrt{1+B^2}\,\tan^{-1}\left(\frac{C}{\sqrt{1+B^2}}\right)-\tan^{-1}(C)+\frac{BC}{\sqrt{1+C^2}}\tan^{-1}\left(\frac{B}{\sqrt{1+C^2}}\right)\right]$ $B=\frac{b}{a} \quad , \quad C=\frac{c}{a}$
Source linéaire parallèle et plan rectangulaire se coupant avec un angle ϕ	S_1, S_2, a, b, c, ϕ	$F_{1-2}=\frac{1}{\pi}\left\{\tan^{-1}B+\frac{\sin^2\phi}{2B}\ln\left[\frac{B^2+X^2}{(1+B^2)X^2}\right]-\frac{\sin 2\phi}{2B}\left[\frac{\pi}{2}-\phi+\tan^{-1}\left(\frac{C-\cos\phi}{\sin\phi}\right)\right]+\frac{Y}{B}\left[\tan^{-1}\left(\frac{C-\cos\phi}{Y}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos\phi}{Y}\right)\right] \text{ x } \cos\phi+\frac{C\cos\phi-1}{X}\tan^{-1}\left(\frac{B}{X}\right)\right\}$ $B=\frac{b}{a}$, $C=\frac{c}{a}$, $X=\sqrt{C^2-2C\cos\phi+1}$, $Y=\sqrt{B^2+\sin^2\phi}$
Deux plans parallèles rectangulaires de même aire	S_1, S_2, a, b, c	$F_{1-2}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{BC}\ln\left(\frac{XY}{X+Y-1}\right)+\frac{2\sqrt{X}}{B}\tan^{-1}\left(\frac{C}{\sqrt{X}}\right)+\frac{2\sqrt{Y}}{C}\tan^{-1}\left(\frac{B}{\sqrt{Y}}\right)-\frac{2}{C}\tan^{-1}(B)-\frac{2}{B}\tan^{-1}(C)\right]$ $B=\frac{b}{a}$, $C=\frac{c}{a}$, $X=1+B^2$, $Y=1+C^2$
Deux bandes parallèles infinies de largeurs différentes	S_1, S_2, a, b, c	$F_{1-2}=\frac{1}{2B}\left[\sqrt{(B+C)^2+4}-\sqrt{(C-B)^2+4}\right]$ $F_{2-1}=\frac{1}{2C}\left[\sqrt{(B+C)^2+4}-\sqrt{(B-C)^2+4}\right]$ $F_{1-2}=F_{2-1}=\frac{1}{B}\left[\sqrt{B^2+1}-1\right]$ si b = c $B=\frac{b}{a} \quad , \quad C=\frac{c}{a}$

A.4.3 : Facteurs de forme géométrique de rayonnement

Configuration	Schéma	Valeur du facteur de forme
Deux plans rectangulaires perpendiculaires ayant un côté commun	S_2, S_1, a, b, c	$F_{1-2} = \frac{1}{\pi B}\left[\frac{1}{4}\ln\left\{\left[\frac{(1+B^2)(1+C^2)}{1+B^2+C^2}\right]\left[\frac{B^2(1+B^2+C^2)}{(1+B^2)(B^2+C^2)}\right]^{B^2}\left[\frac{C^2(1+B^2+C^2)}{(1+C^2)(B^2+C^2)}\right]^{C^2}\right\} + B\tan^{-1}\frac{1}{B} + C\tan^{-1}\frac{1}{C} - \sqrt{B^2+C^2}\,\tan^{-1}\left(\frac{1}{B^2+C^2}\right)\right]$ $B = \frac{b}{a}, C = \frac{c}{a}$; $F_{1-2} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{c}{b}-\sqrt{1+\left(\frac{c}{b}\right)^2}\right]$ si $a \to \infty$
Deux plans identiques ayant un côté commun	l, S_1, S_2, θ, l	$F_{1-2} = F_{2-1} = 1-\sin\frac{\theta}{2}$
Deux rectangles perpendiculaires	A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6	$F_{1-6} = \frac{A_6}{A_1}\left\{\frac{1}{2A_6}\left[(A_1+A_2+A_3+A_4)F_{1234-56} - A_6F_{6-24} - A_5F_{5-13}\right] - \frac{1}{2A_6}\left[(A_3+A_4)F_{34-56} - A_6F_{6-4} - A_5F_{5-3}\right]\right\}$
Deux rectangles parallèles	A_2, A_1, A_3, A_4, A_6, A_5, A_7, A_8	$F_{1-7} = \frac{1}{4A_1}\left(A_{1234}F_{1234-5678} + A_1F_{1-5} + A_2F_{2-6} + A_3F_{3-7} + A_4F_{4-8}\right) - \frac{1}{4A_1}\left(A_{12}F_{12-56} + A_{14}F_{14-58} + A_{34}F_{34-78} + A_{23}F_{23-67}\right)$
Surface élémentaire perpendiculaire à une surface	b, S_2, a, S_1, c	

A.4.3 : Facteurs de forme géométrique de rayonnement

Configuration	Schéma	Valeur du facteur de forme
Deux cylindres infinis à axes parallèles	S_1 S_2 b b 2a	$X = 1 + \frac{a}{b}$ $F_{1-2} = \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{X^2 - 1} - X + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{X}\right)\right]$
Deux disques parallèles	S_2 a c S_1 b	$F_{1-2} = \frac{1}{2}\left[Z - \sqrt{Z^2 - 4X^2Y^2}\right]$ $X = \frac{a}{c}$; $Y = \frac{c}{b}$; $Z = 1 + \left(1 + X^2\right)Y^2$
Deux cylindres finis coaxiaux	b a S_1 S_2 S_3 c	$X = \frac{b}{a}$; $Y = \frac{c}{a}$; $A = Y^2 + X^2 - 1$; $B = Y^2 - X^2 + 1$ $F_{1-2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{\pi X}\left[\cos^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) - \frac{1}{2Y}\left(\sqrt{(A+2)^2 - (2X)^2}\cos^{-1}\left(\frac{B}{XA}\right) + B\sin^{-1}\left(\frac{1}{X}\right) - \frac{\pi A}{2}\right)\right]$ $F_{1-1} = 1 - \frac{1}{X} + \frac{2}{\pi X}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{X^2-1}}{Y}\right) -$ $\frac{Y}{2\pi X}\left[\frac{\sqrt{4X^2+Y^2}}{Y}\sin^{-1}\left(\frac{4\left(X^2-1\right) + \frac{Y^2}{X^2}\left(X^2-2\right)}{Y^2 + 4\left(X^2-1\right)}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{X^2-2}{X^2}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{4X^2+Y^2}}{Y} - 1\right)\right]$ $F_{1-3} = \frac{1}{2}\left(1 - F_{1-2} - F_{1-1}\right)$
Un plan rectangulaire et un cylindre à axe situé dans le plan médian au rectangle	b r S_2 c S_1 a	$F_{1-2} = \frac{2}{Y}\int_0^{Y/2}\left[\frac{X}{X^2+\beta^2} - \frac{X}{\pi\left(X^2+\beta^2\right)}\left(\cos^{-1}\left(\frac{W}{V}\right) - \frac{1}{2Z}\left[\sqrt{V^2+4Z}\right] \mathrm{x}\ \cos^{-1}\left(\frac{W}{V\sqrt{X^2+\beta^2}}\right) + W\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2+\beta^2}}\right) - \frac{\pi V}{2}\right)\right]d\beta$ $X = \frac{a}{r}, Y = \frac{b}{r}, Z = \frac{c}{r}, V = X^2 + Z^2 + \beta^2 - 1, V = Z^2 - X^2 - \beta^2 + 1$

A.4.4 : Epaisseurs de gaz équivalentes vis-à-vis du rayonnement

Géométrie du volume	Dimension caractéristique	4 V/S	$R_{équivalent}$
Hémisphère rayonnant vers son centre	Rayon R	R	R
Sphère rayonnant vers sa surface	Diamètre D	2/3 R	2/3 D
Cylindre de hauteur égale au diamètre rayonnant vers le centre de la base	Diamètre D	0,77D	0,71 D
Cylindre infini rayonnant vers sa surface	Diamètre D	D	0,95 D
Cylindre semi-infini rayonnant vers le centre de sa base	Diamètre D	D	0,90 D
Cylindre semi-infini rayonnant vers toute la base	Diamètre D	D	0,65 D
Cylindre de hauteur égale au diamètre rayonnant vers toute la surface	Diamètre D	2/3 D	0,60 D
Lame à faces parallèles	Epaisseur d	2 d	1,80 d
Cube rayonnant vers une face	Côté d	2/3 d	0,60 d
Parallélépipède rectangle l x l x h : Rayonnement vers toutes les faces Rayonnement vers l x l Rayonnement vers l x h	Plus petit côté d	8/9 d	0,81 d 0,71 d 0,82 d
Volume de gaz autour d'un faisceau de tubes et rayonnant sur un seul tube : - Disposition en triangle équilatéral : P = 2 D P = 3 D - Disposition en carré P = 2 D	Diamètre D du tube Pas p entre centres des tubes	 3,4 (p – D) 4,45 (p – D) 4,1 (p – D)	 3 (p – D) 3,8 (p – D) 3,5 (p – D)

A.5.1 : Les équations de conservation

Nomenclature

c_p	Capacité calorifique à volume constant	$J.kg^{-1}.°C^{-1}$
c_v	Capacité calorifique à volume constant	$J.kg^{-1}.°C^{-1}$
f	Force résultante du champ extérieur par unité de masse fluide	$N.kg^{-1}$
P	Pression	Pa
T	Température	°C
u	Composante de la vitesse selon Ox	$m.s^{-1}$
U	Energie interne par unité de masse	$J.kg^{-1}$
V	Vitesse moyenne	$m.s^{-1}$
v	Composante de la vitesse selon Oy	$m.s^{-1}$
w	Composante de la vitesse selon Oz	$m.s^{-1}$
ϕ	Densité de flux de chaleur	$W.m^{-2}$
μ	Viscosité dynamique	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
ν	Viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
ρ	Masse volumique	$kg.m^{-3}$

Indices :

e	Entrant
g	Généré
s	Sortant

1. Notations

Soit P(x,y,z) un champ scalaire et $\vec{V} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$ un champ vectoriel. On utilisera les notations suivantes :

Opérateur ∇ : $$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dérivée particulaire de P $$\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + w\frac{\partial P}{\partial z}$$

Dérivée particulaire de $\vec{V}$: $$\frac{DV}{Dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergence de $\vec{V}$: $$\mathrm{div}\,\vec{V} = \nabla . V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

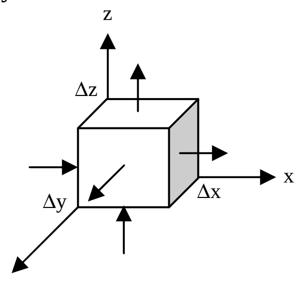
Rotationnel de $\vec{V}$: $$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \nabla \wedge V = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Gradient de P: $$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P) = \nabla P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}$$

Laplacien de P: $\Delta P = \nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$

2. Equation de conservation de la masse

Considérons l'écoulement d'un fluide et effectuons un bilan matière sur le système constitué par l'élément parallèlépipèdique de fluide de côtés Δx, Δy et Δz et de masse dm :



La conservation de la masse dans ce volume entre les instants t et t+dt peut s'écrire pour chacun des composants du mélange :

Masse entrante + Masse initiale + Masse générée = Masse finale + Masse sortante

Ce bilan permet d'établir l'équation de continuité (voir cours de mécanique des fluides) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . [\rho \, V] = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \, \vec{V}\right) = 0 \qquad (1)$$

où : ρ Masse volumique
V Vitesse

3. Equation du mouvement : Navier-Stokes

On se propose ici d'établir l'équation régissant le mouvement d'un fluide supposé monocomposant.
On peut appliquer à un volume élémentaire $\Delta x \Delta y \Delta z$ de fluide la loi de Newton :

$F = m \, \gamma$ où : γ Accélération du fluide ($m.s^{-2}$)

La composante F_x de la force F suivant la direction Ox s'écrit : $F_x = m \, \gamma_x = m \frac{du}{dt}$

On peut écrire u en utilisant un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

La relation x = v.t permet d'écrire pour un temps dt très court pendant lequel u reste constant : dx = udt , dy = vdt , dz= wdt , ce qui permet d'écrire du sous la forme :

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} u \, dt + \frac{\partial u}{\partial y} v \, dt + \frac{\partial u}{\partial z} w \, dt$$

et

$$\gamma_x = \frac{du}{dt} \equiv \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

<u>Ecoulement sans forces visqueuses</u>

Les forces agissant sur le fluide sont de deux types :

- Des forces dues à un champ extérieur (pesanteur par exemple) qui s'appliquent sur tout le volume, on notera f leur résultante par unité de masse.
- Des forces de pression qui agissent sur les surfaces du volume considéré.

La loi de Newton selon Ox s'écrit :

$$\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + \rho\,f_x\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

Et si l'on écrit cette expression suivant les 3 directions, on obtient l'***équation*** (locale) ***d'Euler*** :

$$\rho\,\frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \rho\,f \qquad (2)$$

Cette équation permet de traiter les cas où les forces visqueuses sont absentes : hydrostatique (fluide au repos) ou négligeables : écoulements à grande vitesse loin de la paroi (gradient de vitesse très faible).

On peut aussi l'écrire sous forme intégrale sur un volume Λ délimité par une surface Σ :

$$\int_\Lambda \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dv + \int_\Sigma \rho\,\vec{V}.\vec{n}\,dS = 0 \qquad (3)$$

Où $\vec{n}$ est la normale à la surface Σ dirigée vers l'extérieur du volume Λ.

Ecoulement avec forces visqueuses

Par rapport au cas précédent, il faut ajouter aux forces de surface dues au gradient de pression des forces de cisaillement parallèles aux surfaces du système considéré. On adoptera les notations suivantes pour les forces de cisaillement (frottement visqueux) s'appliquant sur les surfaces d'un volume élémentaire dx dy dz :

- τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz} : composante normale de la force de surface suivant les directions Ox, Oy et Oz.
- τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz}, τ_{zx}, τ_{yz}, τ_{zy} : composante tangentielle de la force de surface : le 1er indice indique la direction normale à la surface considérée, le 2ème indice indique la direction dans laquelle la composante agit.

La loi de Newton permet alors d'écrire selon chacune des 3 directions :

$$\rho\,\frac{Du}{Dt} = \rho\,f_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\rho\,\frac{Dv}{Dt} = \rho\,f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\rho\,\frac{Dw}{Dt} = \rho\,f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z}$$

Cette formulation est valable pour tous les fluides.

Cas d'un fluide newtonien

Un fluide est dit newtonien si les contraintes de cisaillement sont proportionnelles aux gradients de vitesse, on a dans ce cas :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

et : $$\tau_{xx} = \mu\left[2\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\,\nabla.V\right] \quad ; \quad \tau_{yy} = \mu\left[2\,\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\,\nabla.V\right] \quad ; \quad \tau_{zz} = \mu\left[2\,\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\,\nabla.V\right]$$

μ est appelée la ***viscosité dynamique*** du fluide et s'exprime en $kg.m^{-1}.s^{-1}$

En remplaçant le tenseur des contraintes par cette expression dans l'équation générale du mouvement déduite de la loi de Newton on obtient finalement l'***équation de Navier-Stokes :***

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla P + \nu\,\nabla^2 V + \frac{1}{3}\,\nu\,\nabla(\nabla.V) + f \qquad (4)$$

où : $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ Viscosité cinématique exprimée en $m^2.s^{-1}$ et $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

Pour un fluide incompressible : $\nabla . V = 0$ et on obtient une forme simplifiée de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 V + f \qquad (5)$$

Où : f Force de volume due à un champ extérieur (pesanteur par exemple)

Cette dernière équation prend la forme suivante en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] + f_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] + f_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] + f_z$$

En régime permanent cette équation peut s'écrire sous la forme intégrale suivante (théorème d'Euler) :

$$\int_\Sigma \rho \vec{V} \left(\vec{V}.\vec{n}\right) dS = \int_\Lambda \rho \vec{f} \, dv + \int_\Sigma \vec{T} \, dS \qquad (6)$$

Où $\vec{T}$: forces extérieures (par unité de surface) s'exerçant par contact sur les faces de la surface Σ délimitant le volume Λ.

4. Equation de conservation de l'énergie

On considère comme système le volume de fluide de côtés dx, dy, dz centré sur le point de coordonnées (x,y,z). On appellera $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz.

On applique à ce système le premier principe de la thermodynamique entre les instants t et t+dt pendant lequel le volume effectue un déplacement $\vec{dl} = \vec{V} \, dt$:

$$\Delta U = \Delta E_{ci} + W_v + W_p + W_c + \Delta E_{cond}$$

Où :
- ΔU Accumulation d'énergie interne et cinétique au sein du fluide contenu dans le volume
- ΔE_{ci} Energie interne et cinétique entrant dans le système - énergie interne et cinétique sortante
- W_v Travail des forces visqueuses agissant sur les surfaces du système
- W_p Travail des forces de pression sur les faces du système
- W_c Travail des forces du champ extérieur dans le volume Δx Δy Δz
- ΔE_{cond} Energie de conduction entrant dans le système – énergie de conduction sortante

On a : $\Delta U = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\rho V^2\right) \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \, dt$

Pour calculer ΔE_{ci}, calculons par exemple l'énergie cinétique et interne entrant en x à travers la surface perpendiculaire à Ox :

La masse traversant cette surface pendant un temps dt s'écrit : $\rho \, dy \, dz \, u \, dt$

Et l'énergie cinétique et interne entrante a pour valeur : $E_{ci_x} = \rho_x \, dy \, dz \, u_x \, dt \left(U + \frac{1}{2} V^2\right)_x$

L'expression complète de E_{ci} s'écrit donc :

$$\Delta E_{ci} = \left\{ \begin{array}{l} dy\,dz\left[u_x\left(\rho\,U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)_x - u_{x+dx}\left(\rho\,U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)_{x+dx}\right] \\ +dx\,dz\left[u_y\left(\rho\,U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)_y - u_{y+dy}\left(\rho\,U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)_{y+dy}\right] \\ +dx\,dz\left[u_z\left(\rho\,U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)_z - u_{z+dz}\left(\rho\,U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)_{z+dz}\right] \end{array} \right\} dt$$

Or : $u_x\left(\rho U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)_x - u_{x+dx}\left(\rho U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)_{x+dx} = -\dfrac{\partial\left[u\left(\rho U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)\right]}{\partial x}\,dx$

D’où :

$$\Delta E_{ci} = -\,dx\,dy\,dz\left[\frac{\partial\left[u\ldots\left(\rho U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[v\left(\rho U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)\right]}{\partial y}+\frac{\partial\left[w\left(\rho U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)\right]}{\partial z}\right]dt = -\,dx\,dy\,dz\,\nabla.\left[V\left(\rho U+\frac{1}{2}\rho\,V^2\right)\right]dt$$

$$W_v = \sum \vec{F}_v\,.\,\vec{dl}$$

$$W_v = \left\{ \begin{array}{l} dy\,dz\left[\left(\tau_{xx}\,\vec{i}+\tau_{xy}\,\vec{j}+\tau_{xz}\,\vec{k}\right).\left(u_x\,\vec{i}+v_x\,\vec{j}+w_x\,\vec{k}\right)-\left(\tau_{xx}\,\vec{i}+\tau_{xy}\,\vec{j}+\tau_{xz}\,\vec{k}\right).\left(u_{x+dx}\,\vec{i}+v_{x+dx}\,\vec{j}+w_{x+dx}\,\vec{k}\right)\right] \\ +dx\,dz\left[\left(\tau_{yx}\,\vec{i}+\tau_{yy}\,\vec{j}+\tau_{yz}\,\vec{k}\right).\left(u_y\,\vec{i}+v_y\,\vec{j}+w_y\,\vec{k}\right)-\left(\tau_{yx}\,\vec{i}+\tau_{yy}\,\vec{j}+\tau_{yz}\,\vec{k}\right).\left(u_{y+dy}\,\vec{i}+v_{y+dy}\,\vec{j}+w_{y+dy}\,\vec{k}\right)\right] \\ +dx\,dy\left[\left(\tau_{zx}\,\vec{i}+\tau_{zy}\,\vec{j}+\tau_{zz}\,\vec{k}\right).\left(u_z\,\vec{i}+v_z\,\vec{j}+w_z\,\vec{k}\right)-\left(\tau_{zx}\,\vec{i}+\tau_{zy}\,\vec{j}+\tau_{zz}\,\vec{k}\right).\left(u_{z+dz}\,\vec{i}+v_{z+dz}\,\vec{j}+w_{z+dz}\,\vec{k}\right)\right] \end{array} \right\} dt$$

Or : $\left(\tau_{xx}\,\vec{i}+\tau_{xy}\,\vec{j}+\tau_{xz}\,\vec{k}\right).\left(u_x\,\vec{i}+v_x\,\vec{j}+w_x\,\vec{k}\right)-\left(\tau_{xx}\,\vec{i}+\tau_{xy}\,\vec{j}+\tau_{xz}\,\vec{k}\right).\left(u_{x+dx}\,\vec{i}+v_{x+dx}\,\vec{j}+w_{x+dx}\,\vec{k}\right)= \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xx}\,u+\tau_{xy}\,v+\tau_{xz}\,w\right)dx$

D’où : $W_v = dx\,dy\,dz\,\nabla.\left(\vec{Fv}.\vec{V}\right)$

$$W_p = \sum \vec{F_p}\,.\,\vec{dl} = P_x\;dydz\,\vec{i}\,.\,\vec{V}_x\;dt - P_{x+dx}\;dydz\,\vec{i}\,.\,\vec{V}_{x+dx}\;dt + P_y\;dxdz\;\vec{j}\,.\,\vec{V}_y\;dt - P_{y+dy}\;dxdz\;\vec{j}\,.\,\vec{V}_{y+dy}\,dt$$

$$+P_z\;dxdy\;\vec{k}\,.\,\vec{V}_z\;dt - P_{z+dz}\;dxdy\;\vec{k}\,.\,\vec{V}_{z+dz}\,dt = dx\,dy\,dz\left[\frac{\partial(uP)}{\partial x}+\frac{\partial(vP)}{\partial y}+\frac{\partial(wP)}{\partial z}\right]dt = dx\,dy\,dz\;\nabla\left(V\,P\right)dt$$

$$W_c = \vec{F}.\vec{dl} = \rho\,dx\,dy\,dz\;\;\vec{f}\,.\,\vec{V}\,dt$$

$$\Delta E_{cond} = \left\{dy\,dz\left[\phi_{c_x}-\phi_{c_{x+dx}}\right]+dx\,dz\left[\phi_{c_y}-\phi_{c_{y+dy}}\right]+dx\,dy\left[\phi_{c_z}-\phi_{c_{z+dz}}\right]\right\}dt$$

Or : $\phi_{c_x}-\phi_{c_{x+dx}} = -\dfrac{\partial\phi_c}{\partial x}\,dx$ d’où : $\Delta E_{cond} = -dx\,dy\,dz\left[\dfrac{\partial\phi_c}{\partial x}+\dfrac{\partial\phi_c}{\partial y}+\dfrac{\partial\phi_c}{\partial z}\right]dt = -dx\,dy\,dz\,\nabla\phi_c\;dt$

On aboutit à l’***équation de l’énergie*** :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(U+\frac{1}{2}V^2\right)+\nabla.\left[\rho\,V\left(U+\frac{1}{2}V^2\right)\right] = -\nabla\phi_c+\rho\,\vec{V}\,.\,\vec{f}-P\,\nabla\,V-\nabla.\,(\tau\,V)$$

En combinant cette équation avec l’équation de continuité et avec l’équation de Navier-Stokes, on établit une autre forme de l’équation de l’énergie :

$$\rho\,\frac{DU}{Dt} = -\nabla.\phi_c - P\,\nabla.\,V + \tau:\nabla V \qquad (7)$$

Où : $\tau:\nabla V = \nabla.(\tau V) = \tau_{xx}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \tau_{yy}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \tau_{zz}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \tau_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \tau_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$

Le terme ϕ_c représente l'augmentation de l'énergie interne due au transfert de chaleur par conduction qui s'écrit en appliquant la loi de Fourier : $\phi_c = -\lambda\,\nabla T$

D'où : $-\nabla.\phi_c = \nabla.\lambda\nabla T = \lambda\,\nabla^2\,T$ où $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est le Laplacien.

Le terme $-P\,\nabla.V$ est l'augmentation due aux forces de pression de l'énergie interne de l'élément par unité de volume. Ce terme est nul pour un fluide incompressible.
Le terme de dissipation visqueuse $\tau:\nabla V$ est une quantité positive qui représente la transformation irréversible d'énergie mécanique en énergie thermique.
Les relations classiques de la thermodynamique permettent d'écrire l'énergie interne sous la forme :

$$dU = C_v\,dT + \left[-P + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{v_o}\right] d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Ce qui permet d'écrire : $\rho\,\frac{DU}{Dt} = \rho\,C_v\,\frac{DT}{Dt} + \left[-P + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{v_o}\right]\rho\,\frac{D\left(\frac{1}{\rho}\right)}{Dt}$

L'équation de continuité conduit à : $\rho\,\frac{D\left(\frac{1}{\rho}\right)}{Dt} = \nabla.V$

Et à une nouvelle forme de l'équation de l'énergie :

$$\rho\,C_v\,\frac{DT}{Dt} = \lambda\,\nabla^2 T - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho \nabla.V + \tau:\nabla V \qquad (8)$$

Le terme $\tau:\nabla.V$ est important dans les écoulements à très grande vitesse (vitesse du son) et dans les zones à forts gradients de vitesse (près des parois). On peut le négliger dans les autres cas ce qui est fait dans ce qui suit.
On montre que la relation (8) peut aussi s'écrire :

$$\rho\,C_p\,\frac{DT}{Dt} = \lambda\,\nabla^2 T - \left[\frac{\partial \ln(V)}{\partial \ln(T)}\right]_P \frac{DP}{Dt} + \tau:\nabla V \qquad (9)$$

Si l'on fait de plus l'hypothèse du gaz parfait, on a les relation : $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{P}{T}$ et $\left[\frac{\partial \ln(V)}{\partial \ln(T)}\right]_P = 1$

Pour un fluide à pression constante dans lequel on néglige les effets visqueux (ou pour un solide), la relation (9) s'écrit :

$$\rho\,C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + V.\nabla T\right) = \lambda\,\nabla^2 T \qquad (10)$$

Dans le cas d'un solide V = 0 et on obtient :

$$\rho\,C_p\,\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\,\nabla^2 T \qquad (11)$$

C'est l'équation de Poisson qui régit la diffusion de la chaleur.

A.5.2 : Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert en convection forcée

Caractéristiques du fluide calculées à $\theta_f = \dfrac{\theta_p + \theta_\infty}{2}$

<table>
<tr><th>Géométrie</th><th>Corrélation</th></tr>
<tr><td>Ecoulement sur un plan</td><td>
$Nu(x)$: Nu à la distance x du bord du plan
$\overline{Nu}_L$: Nu moyen sur la longueur L du plan

<u>Ecoulement turbulent</u> :
$Nu(x) = 0{,}0288\ Re(x)^{0,8}\ Pr^{1/3}$
$\overline{Nu}_L = 0{,}035\ Re_L^{\ 0,8}\ Pr^{1/3}$ $Re > 5.10^5$ et $Pr \geq 0{,}5$

<u>Ecoulement laminaire</u> :
$Nu(x) = 0{,}324\ Re(x)^{0,5}\ Pr^{1/3}$
$\overline{Nu}_L = 0{,}628\ Re_L^{\ 0,5}\ Pr^{1/3}$ $Re < 5.10^5$ et $10 \geq Pr \geq 0{,}5$
</td></tr>
<tr><td>Ecoulement dans un tube</td><td>
<u>Ecoulement turbulent</u> : $Nu = 0{,}023\ Re^{0,8}\ Pr^n$

$n = 0{,}3$ si $\theta_{fluide} > \theta_{paroi}$
$n = 0{,}4$ si $\theta_{fluide} < \theta_{paroi}$ $Re > 5000$ et $0{,}6 < Pr < 100$
Re calculé pour $D_H = 4S / P$ où : S = section de passage du fluide
P = périmètre de contact fluide/paroi

<u>Ecoulement laminaire</u> : $Nu = 1{,}86\ (Re\ Pr)^{1/3} \left(\dfrac{D}{L}\right)^{1/3} \left(\dfrac{\mu}{\mu_p}\right)^{0,14}$

Valable pour $Re\ Pr\ \dfrac{D}{L} \geq 10$, μ_p calculé à θ_p
</td></tr>
<tr><td>Ecoulement perpendiculaire à un cylindre circulaire</td><td>
$Nu = C\ Re^n\ Pr^{1/3}$, vitesse u_∞ calculée en amont du tube

<table>
<tr><th>Re</th><th>C</th><th>n</th></tr>
<tr><td>0,4 – 4</td><td>0,989</td><td>0,330</td></tr>
<tr><td>4 – 40</td><td>0,911</td><td>0,385</td></tr>
<tr><td>40 – 4000</td><td>0,683</td><td>0,466</td></tr>
<tr><td>4000 – 40000</td><td>0,193</td><td>0,618</td></tr>
<tr><td>40000 - 250000</td><td>0,0266</td><td>0,805</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Ecoulement perpendiculaire à un cylindre non circulaire</td><td>
<table>
<tr><th>Géométrie</th><th>Re</th><th>C</th><th>n</th></tr>
<tr><td>u_∞ → d</td><td>$5\ 10^3 - 10^5$</td><td>0,102</td><td>0,675</td></tr>
<tr><td>u_∞ → d</td><td>$4\ 10^3 – 1{,}5\ 10^4$</td><td>0,228</td><td>0,731</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

A.5.2 : Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert en convection forcée

Caractéristiques du fluide calculées à $\theta_f = \dfrac{\theta_p + \theta_\infty}{2}$

Géométrie	Corrélation

Géométrie : Ecoulement perpendiculaire à un faisceau de 10 tubes

Corrélation :

$Nu = C\ Re^n\ Pr^{1/3}$, vitesse u_∞ calculée en amont du tube

$\frac{S_p}{d}$	$\frac{S_n}{d}$ = 1,25 C	1,25 n	1,5 C	1,5 n	2,0 C	2,0 n	3,0 C	3,0 n
	Disposition en ligne							
1,25	0,386	0,592	0,305	0,608	0,111	0,704	0,070	0,752
1,5	0,407	0,586	0,278	0,620	0,112	0,702	0,075	0,744
2,0	0,464	0,570	0,332	0,602	0,254	0,632	0,220	0,648
3,0	0,322	0,601	0,396	0,584	0,415	0,581	0,317	0,608
	Disposition en quinconce							
0,16	-	-	-	-	-	-	0,236	0,636
0,9	-	-	-	-	0,495	0,571	0,445	0,581
1,0	-	-	0,552	0,558	-	-	-	-
1,125	-	-	-	-	0,531	0,565	0,575	0,560
1,25	0,575	0,556	0,561	0,554	0,576	0,556	0,579	0,562
1,5	0,501	0,568	0,511	0,562	0,502	0,568	0,542	0,568
2,0	0,448	0,572	0,462	0,568	0,535	0,556	0,498	0,570
3,0	0,344	0,592	0,395	0,580	0,488	0,562	0,467	0,574

S_p d S_n

Disposition en ligne

S_p S_p S_n

Disposition en quinconce

Géométrie : Ecoulement perpendiculaire à un faisceau de n rangées de tubes (n ≤ 10)

Corrélation :

$$N = \frac{h_n}{h_{10}}$$

Nombre rangées	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N en ligne	0,64	0,80	0,87	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99	1,0
N en quinconce	0,68	0,75	0,83	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1,0

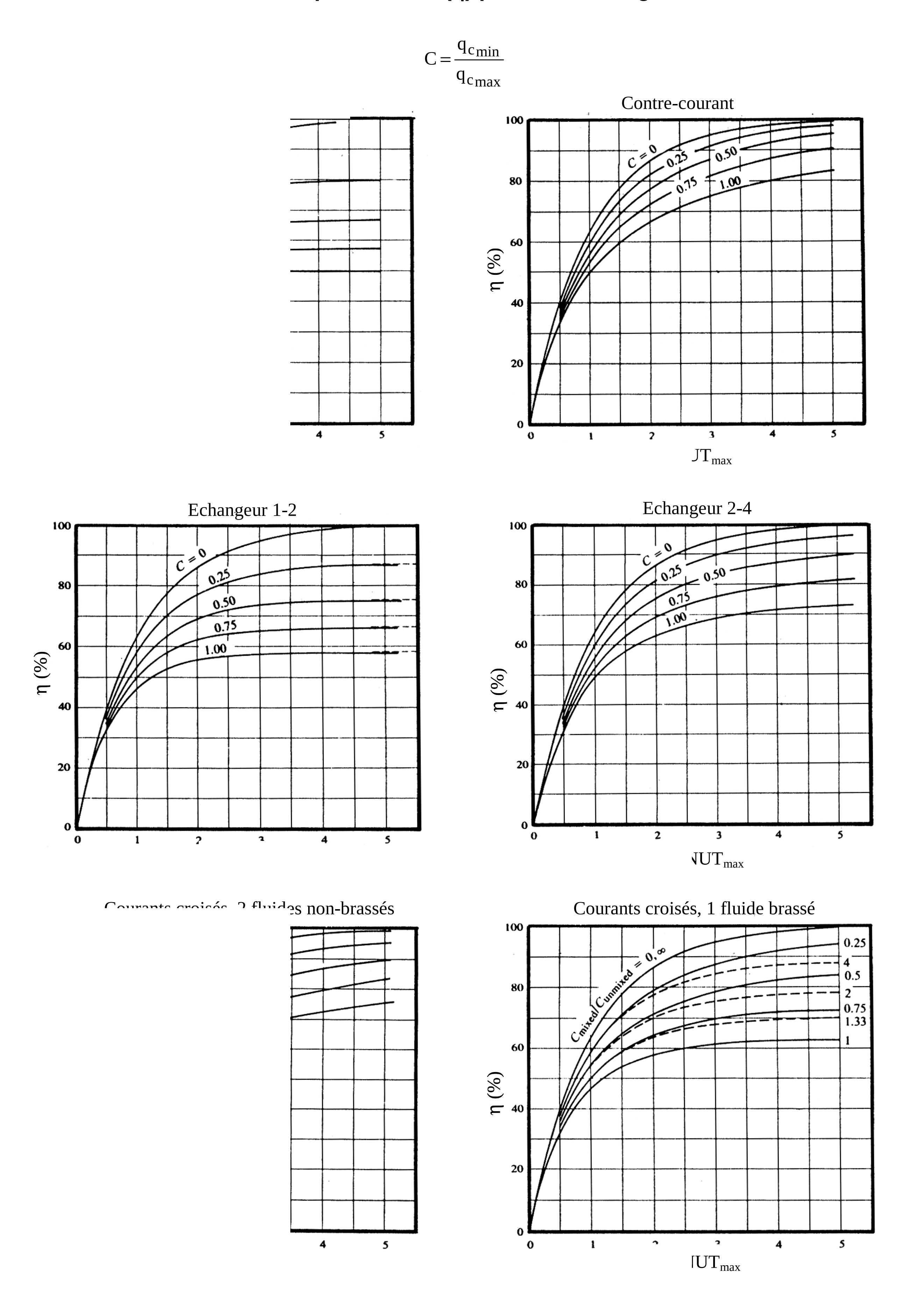
A.5.3 : Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert en convection naturelle

Corrélations valables pour tous fluides : Nu = C (Gr Pr) ^{m}			
Géométrie	**Gr Pr**	**C**	**m**
Plaques et cylindres verticaux	10^4 - 10^9 10^9 - 10^{13}	0,59 0,021	1/4 2/5
Cylindres horizontaux	10^{-10} - 10^{-2} 10^{-2} - 10^2 10^2 - 10^4 10^4 - 10^7 10^7 - 10^{12}	0,675 1,02 0,850 0,480 0,125	0,058 0,148 0,188 0,25 0,33
Face supérieure d'une plaque chaude ou face inférieure d'une plaque froide	2.10^4 - 8.10^6 8.10^6 - 10^{11}	0,54 0,15	0,25 0,33
Face inférieure d'une plaque chaude ou face supérieure d'une plaque froide	10^5 - 10^{11}	0,27	0,25
Cellule fermée rectangulaire inclinée L, d, T_1, T_2, φ, Convection naturelle $T_1 < T_2$, L/d > 12	$\mathrm{Nu} = 1 + 1{,}44\left(1 - \dfrac{1708}{\mathrm{Gr\,Pr}\cos\varphi}\right)^{*}\left[1 - \dfrac{1708\left(\sin(1{,}8\,\varphi)\right)^{1{,}6}}{\mathrm{Gr\,Pr}\cos\varphi}\right] + \left[\left(\dfrac{\mathrm{Gr\,Pr}\cos\varphi}{5830}\right)^{1/3} - 1\right]^{*}$ si $0 < \varphi < \tan^{-1}(4800\,\mathrm{Pr})$ Les grandeurs * sont prises égales à 0 si le résultat de leur calcul conduit à un nombre négatif (Hollands et al, 1976)		

Relations simplifiées pour de l'air à pression atmosphérique		
Géométrie	Laminaire $10^4 < \mathrm{Gr\,Pr} > 10^9$	Turbulent $\mathrm{Gr\,Pr} > 10^9$
Plaque ou cylindre vertical	$h = 1{,}42\left(\dfrac{\Delta\theta}{L}\right)^{1/4}$	$h = 1{,}31\,(\Delta\theta)^{1/3}$
Cylindre horizontal	$h = 1{,}32\left(\dfrac{\Delta\theta}{D}\right)^{1/4}$	$h = 1{,}24\,(\Delta\theta)^{1/3}$
Face supérieure d'une plaque horizontale chaude ou face inférieure d'une plaque froide	$h = 1{,}32\left(\dfrac{\Delta\theta}{L}\right)^{1/4}$	$h = 1{,}52\,(\Delta\theta)^{1/3}$
Face inférieure d'une plaque chaude ou face supérieure d'une plaque froide	$h = 0{,}59\left(\dfrac{\Delta\theta}{L}\right)^{1/4}$	$h = 0{,}59\left(\dfrac{\Delta\theta}{L}\right)^{1/4}$

A.6.1 : Abaques NUT = f(η) pour les échangeurs

$$C = \frac{q_{c_{min}}}{q_{c_{max}}}$$



A.7 : Méthodes d'estimation de paramètres

Introduction

On réalise, à des instants t_i, N mesures $\hat{Y}_i$ d'une grandeur Y dépendant de n paramètres k_0, k_1, …, k_n et éventuellement du temps t. On suppose que l'on connaît le modèle physique exact permettant de relier la valeur de Y à celles des paramètres k_0, k_1, …, k_n sous la forme $Y= f(k_0, k_1, \dots k_n, t)$.

Exemples :

- Forme linéaire : $Y(t) = f(k_0, k_1, t) = k_0 + k_1 t$
- Forme exponentielle : $Y(t) = f(k_0, k_1, t) = k_0 \exp(k_1 t)$

Le problème posé est double :

- Trouver les valeurs de k_0, k_1, …k_n, telles que la courbe $Y= f(k_0, k_1, \dots k_n, t)$ représente ***au mieux*** les N couples de points expérimentaux [$\hat{Y}_i$,t_i]
- Estimer la précision avec laquelle les valeurs k_0, k_1, …k_n sont estimées.

Un des problèmes annexes qui se pose est de choisir un critère dont la minimisation permettra d'affirmer que les valeurs estimées k_0, k_1, …k_n sont celles qui représentent ***au mieux*** les points expérimentaux par la courbe théorique.

L'idée la plus simple serait de choisir comme critère la somme S des distances des points à la courbe théorique mais les écarts négatifs peuvent compenser des écarts positifs et rendre ce critère inadapté ainsi que représenté sur la figure 1.

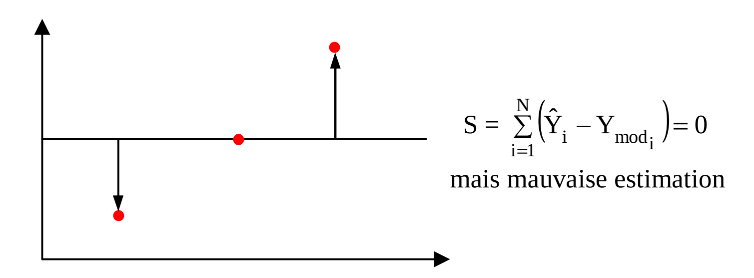


Figure 1 : Schématisation de la somme des écarts

Le critère le plus souvent retenu est la somme D des écarts quadratiques, soit la somme des carrés des distances des points expérimentaux à la courbe théorique tel que représenté sur la figure 2.

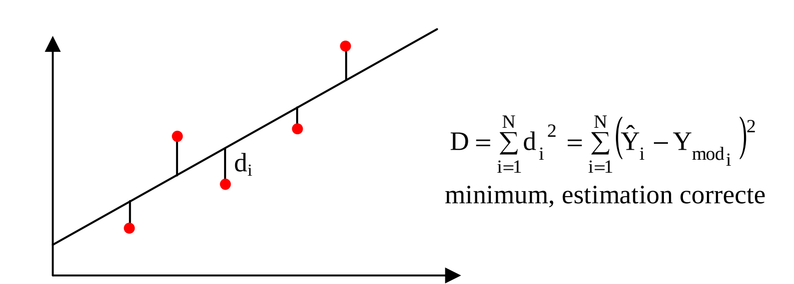


Figure 2 : Schématisation de la somme D des écarts quadratiques

Plusieurs méthodes d'estimation vont être décrites, la première : Moindres carrés linéaires ne s'applique que si les fonctions $\left(\dfrac{\partial f}{\partial k_i}\right)$ sont indépendantes des k_i. C'est le cas du premier exemple (forme linéaire) mais pas du

second (forme exponentielle) car $\left(\frac{\partial f}{\partial k_1}\right) = k_0\ k_1\ \exp(k_1\ t)$ dépend de k_0 et de k_1.

On peut toutefois dans ce cas particulier se ramener à des fonctions $\left(\frac{\partial f}{\partial k_i}\right)$ indépendantes des paramètres à estimer en considérant la fonction $g(k_0, k_1, t) = \ln[f(k_0, k_1, t)] = \ln(Y) = \ln(k_0) + k_1 t$. On estimera alors les paramètres $\ln(k_0)$ et k_1.

Il n'est cependant pas toujours possible de se ramener au cas de figure de fonctions $\left(\frac{\partial f}{\partial k_i}\right)$ indépendantes des k_i, la méthodes des moindres carrés linéaires n'est donc pas toujours applicable et il faudra alors avoir recours à d'autres méthodes : méthode itérative, du gradient, de Newton ou de Marquart.

Paramètres liés par une relation linéaire

On suppose dans ce paragraphe que les fonctions $\left(\frac{\partial f}{\partial k_i}\right)$ sont indépendantes des k_i.

Méthode des moindres carrés linéaires

Cas d'une relation linéaire : $Y = k_0 + k_1\ t$

Considérons, à titre de démonstration de la méthode des moindres carrés linéaires, une relation du type $Y = k_0 + k_1\ t$ où k_0 et k_1 sont les constantes inconnues à estimer.

On dispose de N couples ($\hat{Y}_i$,t_i) de points expérimentaux et l'on cherche à estimer les valeurs de k_0 et k_1 qui minimisent le critère $D = \sum_{i=1}^{N} d_i^{\,2}$ soit $D = \sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - k_0 - k_1 t_i\right)^2$.

Les valeurs de k_0 et k_1 qui minimisent D sont telles que : $\frac{\partial D}{\partial k_0} = 0$ et $\frac{\partial D}{\partial k_1} = 0$

Soit : $$\frac{\partial D}{\partial k_0} = 2\sum_{i=1}^{N}(-1)\left[\hat{Y}_i - (k_0 + k_1 t)\right] = -2\sum_{i=1}^{N}\left[\hat{Y}_i - (k_0 + k_1 t)\right]$$

$$\frac{\partial D}{\partial k_1} = -2\sum_{i=1}^{N} t_i\left[\hat{Y}_i - (k_0 + k_1 t)\right]$$

k_0 et k_1 sont donc tels que : $$\sum_{i=1}^{N}\left[\hat{Y}_i - (k_0 + k_1 t)\right] = 0 \quad \text{ou} \quad N\,k_0 + k_1\sum_{i=1}^{N} t_i = \sum_{i=1}^{N}\hat{Y}_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} t_i\left[\hat{Y}_i - (k_0 + k_1 t)\right] = 0 \quad \text{ou} \quad k_0\sum_{i=1}^{N} t_i + k_1\sum_{i=1}^{N} t_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} t_i\ \hat{Y}_i$$

Que l'on peut écrire sous forme matricielle : $$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} t_i \\ \sum_{i=1}^{N} t_i & \sum_{i=1}^{N} t_i^{\,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}\hat{Y}_i \\ \sum_{i=1}^{N} t_i\ \hat{Y}i \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$k_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i^{\,2}\sum_{i=1}^{N}\hat{Y}_i - \sum_{i=1}^{N} t_i\sum_{i=1}^{N} t_i\ \hat{Y}i}{N\sum_{i=1}^{N} t_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2} \quad ; \quad k_1 = \frac{N\sum_{i=1}^{N} t_i\ \hat{Y}_i - \sum_{i=1}^{N} t_i\sum_{i=1}^{N}\hat{Y}_i}{N\sum_{i=1}^{N} t_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2} \qquad (1)$$

Cas général

Supposons que la relation liant Y aux paramètres k_0, k_l,…k_n à déterminer soit de la forme : Y_{mod} = f (k_0, k_1,….k_n, t) On peut écrire sous forme d'un développement limité au premier ordre :

$$dY(t) = \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)_t dk_i$$

On en déduit : $\hat{Y}_i = Y + e_{Y_i} = Y + \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)_{t_i} e_{k_i}$

Soit sous forme matricielle pour les N mesures :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 - Y_1 \\ \vdots \\ \hat{Y}_N - Y_N \end{bmatrix}}_{[e_Y]} = \underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial k_0}\right)_{t_0} & \left(\frac{\partial f}{\partial k_1}\right)_{t_0} & \cdots & \left(\frac{\partial f}{\partial k_n}\right)_{t_0} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial k_0}\right)_{t_2} & \left(\frac{\partial f}{\partial k_1}\right)_{t_1} & \cdots & \left(\frac{\partial f}{\partial k_n}\right)_{t_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f}{\partial k_0}\right)_{t_N} & \left(\frac{\partial f}{\partial k_1}\right)_{t_N} & \cdots & \left(\frac{\partial f}{\partial k_n}\right)_{t_N} \end{bmatrix}}_{[X]} \text{ x } \underbrace{\begin{bmatrix} e_{k_0} \\ \vdots \\ e_{k_n} \end{bmatrix}}_{[e_B]}, \quad \text{on notera} \quad [B] = \begin{bmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

La matrice [X] est appelée la matrice de sensibilité.

Si les conditions suivantes sont remplies :

1. La matrice de sensibilité [X] est indépendante de la matrice [B]
2. La mesure ou l'estimation de Y est sans biais (erreur de moyenne nulle).
3. Le vecteur [B] est constant et inconnu avant estimation
4. La matrice [X] est connue sans erreur (incertitude nulle sur t_i)
5. L'erreur de mesure ou d'estimation sur Y est d'écart type constant connu (à une constante multiplicative près).

Alors une estimation de la matrice [B] peut être obtenue par :

$$[B] = [X^t\, X]^{-1}\, [X]^t [\hat{Y}] \qquad (2)$$

Cette estimation minimise l'écart quadratique $D = [\hat{Y} - Y]^t\, [\hat{Y} - Y]$, soit la somme des carrés des distances des points expérimentaux à la courbe (droite) estimée. C'est la formule de « régression linéaire » utilisée par les tableurs et les calculatrices. On pourra vérifier que la relation (3) permet bien de retrouver les résultats obtenus au §2.1.1.1 dans le cas d'une relation de la forme $Y = k_0 + k_1\, t$.

Si l'incertitude (ou l'écart type de l'erreur) de mesure ou d'estimation de toutes les valeurs mesurées $\hat{Y}_i$ est identique et a pour valeur σ_Y, on peut estimer l'écart type de l'erreur sur l'estimation des paramètres k_0, k_1,…………k_n à l'aide de la formule :

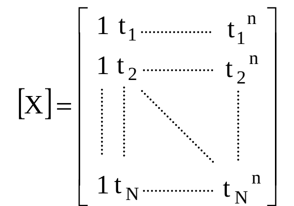
$$[\text{cov}(e_B)] = \sigma^2\, [X^t\, X]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Les variables a_{00}, a_{11}, ….. a_{nn} représentent respectivement les carrés des écarts types de l'erreur d'estimation de k_0, k_1,….. k_n : $\sigma k_i = \sqrt{a_{ii}}$

Ces valeurs ne doivent pas être confondues avec le coefficient de régression calculé par les programmes de régression linéaire qui donne des informations sur la manière dont les points sont dispersés autour de la courbe estimée mais pas sur la fiabilité de l'estimation. A titre d'exemple, une régression linéaire sur deux points conduira à un coefficient de régression de 1 même si les deux points sont connus avec une incertitude relative de 100% ! L'application de la formule précédente permet au contraire de définir un intervalle de confiance des valeurs estimées tenant compte de la fiabilité de chaque point expérimental ayant servi à l'estimation.

Remarques :

- La méthode ne s'applique qui si la matrice $[X^tX]$ est inversible.
- Dans le cas où l'on recherche une relation de type polynomiale : $Y_{mod} = k_0 + k_1\, t + \ldots\ldots + k_n\, t^n$, la matrice de sensibilité [X] s'écrit simplement :



$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{\,n} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_N & \cdots & t_N^{\,n} \end{bmatrix}$$

Paramètres liés par une relation non-linéaire

Le problème à résoudre est le suivant : trouver les valeurs des paramètres k_0, k_1, …k_n tels que la courbe modèle $Y_{mod} = f(k_0, k_1, \ldots k_n, t)$ représente au mieux N couples de points expérimentaux [$\hat{Y}_i$,t_i]. La forme de la fonction f est supposée connue, les paramètres k_0, k_1, …k_n sont inconnus et à déterminer. On se place ici dans le cas où les fonctions $\left(\frac{\partial f}{\partial k_i}\right)$ ne sont pas indépendantes des k_i , la méthode des moindres carrés linéaires ne peut alors pas s'appliquer. On minimisera toujours dans ce qui suit la somme D des écarts quadratiques non pondérés entre les points expérimentaux et théoriques. On verra toutefois que l'on peut toutefois évaluer la précision avec laquelle les paramètres inconnus ont été déterminés.

<u>Méthode du gradient</u>

C'est une méthode itérative détaillée entre autres par Trigeassou. On suppose comme dans les cas précédents que l'on dispose de N couples [$\hat{Y}_i$,t_i] de points expérimentaux. On connaît la forme explicite de la fonction non linéaire liant ces points dans laquelle figurent p paramètres inconnus à déterminer : $Y_{mod}(t) = f(k_0, k_1,\ldots, k_p, t)$.

On note D la somme des écarts quadratiques entre les courbes expérimentales et simulées :

$$D = \sum_{i=1}^{N}\left[\hat{Y}(t_i) - Y(t_i)\right]^2$$

Dans la méthode du gradient, la matrice [B] des paramètres inconnus se calcule de manière itérative par :

$$[B_{i+1}] = [B_i] - \lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial k_0} \\ \frac{\partial D}{\partial k_1} \\ \\ \frac{\partial D}{\partial k_p} \end{bmatrix} \qquad \text{avec : } \frac{\partial D}{\partial k_j} = -2\sum_{i=1}^{N}\left[\hat{Y}(t_i) - Y(t_i)\right]\frac{\partial Y}{\partial k_j}(t_i) \qquad (4)$$

où $Y(t_i)$ et $\frac{\partial Y}{\partial k_j}(t_i)$ sont calculés avec les valeurs k_{0j}, k_{1j},……k_{pj} .

λ est un nombre positif dont le choix est important dans la stabilité de la méthode. Si la méthode diverge, il faut réessayer avec une autre valeur de λ. Cet inconvénient associé au fait que la méthode du gradient est une méthode d'ordre 1 lui fait souvent préférer la méthode de Newton.

Méthode de Newton

C'est également une méthode itérative mais d'ordre 2 détaillée entre autres par Trigeassou. On suppose comme dans les cas précédents que l'on dispose de N couples [$\hat{Y}_i$,t_i] de points expérimentaux. On connaît la forme explicite de la fonction non linéaire liant ces points dans laquelle figurent p paramètres inconnus à déterminer : $Y(t) = f(k_0, k_1, \ldots, k_p, t)$.

Dans la méthode de Newton, la matrice [B] des paramètres inconnus k_j se calcule de manière itérative par :

$$[B_{i+1}] = [B_i] - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial k_0^{\,2}} & \frac{\partial^2 D}{\partial k_1\, \partial k_0} & \cdots & \frac{\partial^2 D}{\partial k_p\, \partial k_0} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial k_0\, \partial k_1} & \frac{\partial^2 D}{\partial k_1^{\,2}} & \cdots & \frac{\partial^2 D}{\partial k_p\, \partial k_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 D}{\partial k_0\, \partial k_p} & \frac{\partial^2 D}{\partial k_1\, \partial k_p} & \cdots & \frac{\partial^2 D}{\partial k_p^{\,2}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial k_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial D}{\partial k_p} \end{bmatrix} = [B_i] - [D'']^{-1}\,[D'] \qquad (5)$$

La matrice [D"] est appelée le Hessien du critère de minimisation, avec comme précédemment :

$$\frac{\partial D}{\partial k_j}(t_i) = -2\sum_{i=1}^{N}\left[\hat{Y}(t_i) - Y(t_i)\right]\frac{\partial Y}{\partial k_j}(t_i)$$
$$\frac{\partial^2 D}{\partial k_j\, \partial k_\ell}(t_i) = 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial Y}{\partial k_j}(t_i)\frac{\partial Y}{\partial k_\ell}(t_i) - 2\sum_{i=1}^{N}\left[\hat{Y}(t_i) - Y(t_i)\right]\frac{\partial^2 Y}{\partial k_j\, \partial k_\ell}(t_i) \qquad (6)$$

En pratique on néglige le second terme devant le premier (approximation de Gauss-Newton) et on calcule les termes du pseudo-hessien par :

$$\frac{\partial^2 D}{\partial k_j\, \partial k_\ell}(t_i) = 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial Y}{\partial k_j}(t_i)\frac{\partial Y}{\partial k_\ell}(t_i) \qquad (7)$$

où $Y(t_i)$, $\frac{\partial Y}{\partial k_j}(t_i)$ et $\frac{\partial^2 Y}{\partial k_j\, \partial k_\ell}(t_i)$ sont calculés avec les valeurs k_{0j}, k_{1j},……k_{pj} .

Cette méthode n'est stable que si la matrice [D"] est définie positive. Elle peut diverger si l'on part trop loin de la solution d'où le soin particulier à apporter au choix des valeurs de départ qui pourra être guidé par des considérations physiques. Cette méthode possède l'avantage de la rapidité et ne nécessite pas contrairement à la méthode du gradient de choisir de manière un peu arbitraire un paramètre (λ pour la méthode du gradient) dont peut dépendre la convergence.

Méthode de Marquart

La méthode du gradient permet de s'approcher plus rapidement du minimum de D que la méthode de Newton lorsqu'on est loin de ce minimum mais converge plus lentement lorsqu'on s'approche du minimum. Marquart a proposé un algorithme qui combine les avantages des deux méthodes. Il a proposé d'appliquer la méthode de Newton mais en remplaçant la matrice D" du Hessien (ou pseudo-hessien) par la matrice A" définie de la manière suivante :

$$\boxed{A'' = D'' + \lambda\ I} \qquad (8)$$

Où I est la matrice unité et λ un paramètre auquel on attribuera les valeurs suivantes :

- $\lambda = 0{,}1$ au départ par exemple.
- Après la $i^{ème}$ itération, on compare les valeurs de D(i) et D(i-1). Si D(i) < D(i-1) alors on multiplie la valeur de λ par 10 pour effectuer l'itération suivante. Sinon, on reprend la $i^{ème}$ itération après avoir divisé la valeur de λ par 10.

Evaluation de la précision de l'estimation

La précision avec laquelle les paramètres inconnus ont été estimés par les différentes méthodes présentées peut être évaluée de manière approchée en supposant que la fonction Y_{mod} (k_0, k_1, …k_n, t) est linéaire par rapport à k_0, k_1, …., k_p sur des intervalles de très faibles amplitudes autour des valeurs optimales estimées. On utilise alors la relation (3) comme dans le cas de la méthode des moindres carrés linéaires.

EXERCICES

Transfert de chaleur par conduction en régime permanent

1. Apport de chaleur dans une pièce climatisée

Les murs d'une pièce climatisée à 25°C sont constitués des différentes couches suivantes de l'extérieur vers l'intérieur :

- 2 cm d'enduit en ciment
- 20 cm d'agglomérés creux
- 5 cm de polystyrène
- 1 cm de plâtre

La température extérieure est de 35°C, les coefficients de convection externe et interne ont pour valeur respectives $h_e = 10$ W.m^{-2}.°C^{-1} et $h_i = 5$ W.m^{-2}.°C^{-1}.

1. Calculer la résistance thermique globale du mur.
2. Calculer le flux de chaleur entrant pour une surface de 40 m^2.
3. Calculer le coût journalier de la climatisation représenté par les pertes à travers ces murs en considérant les données suivantes :
   - Fonctionnement 8h par jour
   - Efficacité de l'installation de climatisation égale à 2
   - Prix du kWh électrique égal à 0,13 €
4. Calculer la température de la face intérieure du mur.
5. Reprendre les questions 3 et 4 dans les deux cas suivants : 10 cm de polystyrène et pas de polystyrène.
6. La consommation d'un écran cathodique de PC est de 150W, celle d'un écran plat est de 75W. En supposant qu'il reste également allumé pendant 8h par jour, comparer l'effet du passage d'une épaisseur de polystyrène de 5 à 10 cm avec l'effet d'un changement d'écran. Quelle économie annuelle représente un changement d'écran ?

Données : $\lambda_{\text{agglomérés creux}} = 0,5$ W.m^{-1}.°C^{-1} , $\lambda_{\text{enduit}} = 0,95$ W.m^{-1}.°C^{-1},
$\lambda_{\text{plâtre}} = 1,2$ W.m^{-1}.°C^{-1}, $\lambda_{\text{polystyrène}} = 0,035$ W.m^{-1}.°C^{-1}.

2. Pertes thermiques d'un oléoduc

Un oléoduc de diamètre 100/108 mm est isolé par une couche de laine de verre d'épaisseur e = 50 mm et de conductivité thermique $\lambda = 0,042$ W.m^{-1}.K^{-1}. la température d'entrée de l'huile est $T_i = 50$°C, la température de l'air extérieur est $T_\infty = -15$°C et le coefficient d'échange avec l'air extérieur $h_e = 30$ Wm^{-2}.K^{-1} (vent fort). Si le débit d'huile est $\dot{m} = 6,4 \text{ kg.s}^{-1}$, la chaleur massique de l'huile $c_p = 2100$ J.kg^{-1}.K^{-1}, quelle est la température de l'huile au bout d'une longueur L = 10 km ?

3. Epaisseur critique d'isolation

Soit un tube cylindrique de rayon interne r_1 et de rayon externe r_2 constitué d'un matériau de conductivité thermique λ_1. Supposons que l'on veuille l'isoler avec un manchon de rayon externe r_3 et de conductivité thermique λ_2. Soient h_i et h_e les coefficients de transfert interne et externe.

1. Calculer la résistance thermique du tube seul.
2. Calculer la résistance thermique de l'ensemble tube + manchon.
3. Déterminer les conditions pour lesquelles l'adjonction d'un manchon permet bien de diminuer les pertes thermiques.

Données : $r_2 = 1,5$ cm ; $\lambda_2 = 0,1$ W m^{-1} °C^{-1} ; $h_e = 6$ W m^{-2} °C^{-2}.

4. Anémométrie à fil chaud

L'expérience montre qu'un conducteur filiforme fin parcouru par un courant électrique et soumis à un écoulement transversal d'un fluide atteint très rapidement un état d'équilibre thermique sous l'influence d'une part de l'effet Joule et d'autre part des pertes de chaleur par conduction le long du fil et surtout par convection sur la surface latérale du fil immergé dans le fluide. Si le fil est chauffé modérément, l'effet du rayonnement thermique est négligeable par rapport à celui de la convection. Ce principe est utilisé pour mesurer (à partir de la variation du coefficient d'échange par convection h) la vitesse du fluide à l'aide d'un dispositif appelé « anémomètre à fil chaud ».
Considérons un fil cylindrique circulaire de diamètre d, de longueur 2ℓ dont le coefficient de conductivité thermique λ est constant et la résistivité électrique ρ fonction linéaire de la température T de sorte que $\rho = \rho_e\,(1+\beta\,\theta)$ où $\theta = T - T_e$ et ρ_e la résistivité du fil à la température T_e de référence. Ce fil est maintenu entre deux bornes d'amenée du courant, massives et de grandes dimensions, de sorte que la température aux extrémités du fil puisse être considérée comme égale à la température des bornes, elle-même égale à la température du fluide incident T_e. Le coefficient d'échange par convection h entre le fluide incident à la température T_e et la surface latérale du fil immergé sera supposé constant même au voisinage des extrémités.

1. Si I est l'intensité du courant parcourant le fil en régime de fonctionnement normal, c'est à dire lorsque l'équilibre thermique du fil est atteint, déterminer l'expression du champ de température le long du fil (la valeur de h reste supérieure à 4000 $W.m^{-2}.K^{-1}$).
2. Calculer les pertes par conduction aux extrémités du fil. A partir de quelle longueur $2\ell_0$ du fil peut-on considérer que les pertes de chaleur par les extrémités du fil sont indépendantes de la longueur ?
3. Quand le fil parcouru par un courant d'intensité I est placé dans un écoulement pour lequel le coefficient d'échange par convection h est connu, calculer l'expression de la résistance électrique R du fil et en déduire l'expression d'une température moyenne $\overline{\theta}$ telle que $R = R_e\,(1+\beta\,\overline{\theta})$ avec $R_e = \dfrac{8\rho_e\,\ell}{\pi\,d^2}$.
4. Dans la pratique, c'est le coefficient d'échange par convection h que l'on désire mesurer. Cela est rendu possible par la mesure simultanée de l'intensité I et de la résistance R du fil. Déterminer le coefficient d'échange par convection h à partir des grandeurs caractéristiques du fil à la température T_e et des valeurs à l'équilibre de la résistance électrique R et de l'intensité du courant I.
5. Pour une intensité I = 60 mA, on a mesuré R/Re = 2,004. Que vaut le coefficient d'échange h ? Si l'on admet que dans ces conditions expérimentales le coefficient d'échange h (en $W.m^{-2}.K^{-1}$) est donné en fonction de la vitesse v (en $m.s^{-1}$) par la relation $h = 3945\,v^{0,33}$, quelle est la vitesse de l'air ?

   Données numériques :
   $d = 5.10^{-6}$ m ; $\ell = 5.10^{-4}$ m ; $\rho_e = 9{,}8.10^{-8}$ Ω.m ; $\beta = 3{,}8.10^{-3}$ K^{-1} ; $\lambda = 70$ $W.m^{-1}.°C^{-1}$

5. Paroi de conductivité variable

Une paroi plane est constituée d'un matériau homogène dont le coefficient de conductivité thermique peut être représenté par : $\lambda = \lambda_0\,(1 + a\,T)$, λ_0 étant la conductivité thermique à 0°C. Les faces sont soumises aux températures T_1 et T_2.

1. Quelle est la densité de flux traversant le mur d'épaisseur e ?
2. Comment varie la température en fonction de x ?
3. Le flux est-il inférieur ou supérieur à celui calculé avec $\lambda = \lambda_0$?
4. Données : T_1 = 20°C ; T_2 = 35°C ; a = 0,005$°C^{-1}$; λ_0 = 0,03 $kcal.h^{-1}.m^{-1}.°C^{-1}$; e = 20 cm.

6. Calcul d'une ailette

Une ailette en aluminium de largeur 5 cm, de longueur 10 cm et d'épaisseur 3 mm est encastrée dans un mur. La base de l'ailette est maintenue à 300°C, la température ambiante est de 30°C et le coefficient de transfert est de 10 $W.m^{-2}.°C^{-1}$.

1. Déterminer la température à l'extrémité de l'ailette et le flux extrait par l'ailette si l'on néglige les gradients thermiques dans les sens de la largeur et de l'épaisseur.

2. On appelle efficacité de l'ailette le rapport du flux extrait sur le flux qui serait extrait par l'ailette de même géométrie dont la température serait uniforme et égale à la température de sa base. Calculer cette efficacité.
3. Calculer l'erreur relative que l'on aurait commise en considérant que la température de l'extrémité de l'ailette était égale à la température ambiante.
4. Ecrire les équations à résoudre dans le cas où l'on tient compte d'un gradient thermique dans le sens de la largeur de l'ailette.

7. Résistance thermique d'un tube aileté

Considérons un tube cylindrique circulaire en acier de conductivité thermique λ = 40 W.m^{-1}.K^{-1}, de longueur ℓ = 3 m, de rayon intérieur R_i = 70 mm et de rayon extérieur R_e = 80 mm. Il est parcouru par un écoulement d'eau chaude à la température T_i et le coefficient d'échange interfacial intérieur, côté eau, est égal à h_i = 250 W.m^{-2}.K^{-1}. De l'air frais à la température T_e circule axialement sur la surface extérieure et le coefficient d'échange interfacial extérieur, côté air, est égal à h_e = 40 W.m^{-2}.K^{-1}.

Afin d'accroître le transfert de chaleur entre l'eau et l'air, on décide de disposer des ailettes longitudinales en acier (λ = 40 W.m^{-1}.K^{-1}).

1. Les ailettes doivent-elles être placées côté eau ou côté air ? Justifier leur implantation. Pour des raisons aérodynamiques, leur nombre est fixé à 20. Elles sont soudées le long des génératrices du tube sur toute la longueur l et régulièrement espacées sur le cercle directeur. Soient L leur hauteur et e leur épaisseur supposée constante (ailette rectangulaire). Afin de minimiser le poids de matière première, on impose le produit eL = 128 mm^2.
2. Déterminer les dimensions géométriques optimales d'une ailette pour évacuer un flux maximum.
3. Quelle est l'efficacité totale η_t de la surface munie d'ailettes ?

   Remarque : Dans le calcul de la résistance thermique interfaciale d'une paroi munie d'ailettes, la surface dont il faut tenir compte est la surface η_t S où η_t est l'efficacité totale et S la surface baignée par le fluide.
4. Quelle est la résistance thermique totale entre l'eau à la température T_i et l'air extérieur à la température T_e ? Donner le schéma électrique équivalent et discuter.
5. Quel est le flux de chaleur échangé entre l'eau et l'air si $T_i - T_e$ = 60°C ? Comparer ce flux à celui qui serait échangé par le même dispositif non muni d'ailettes.

8. Chambre froide

On considère une chambre froide cubique de côté intérieur l = 3 m à une température intérieure de –18°C. Les parois sont constituées de 15 cm de polystyrène et de 10 cm de béton. La température extérieure est de 35°C, les coefficients de transfert interne et externe valent respectivement h_e = 15 W m^{-2} °C^{-1} et h_i = 10 m^{-2} °C^{-1}. En supposant que le sol est parfaitement isolé, calculer le flux de chaleur entrant dans l'enceinte.

9. Tubes enterrés

Deux tubes sont enterrés dans le sol et maintenus respectivement à 300°C et à 125°C. Leurs diamètres sont de 8 cm et de 16 cm, la distance entre leurs axes est de 40 cm. Calculer le flux échangé par mètre de longueur si la conductivité thermique de la terre est de 0,7 W.m^{-1}.°C^{-1}.

Transfert de chaleur par conduction en régime transitoire

10. Gel des conduites d'eau dans un sol sec

Dans l'installation des conduites d'eau souterraines, il est important de déterminer la profondeur à laquelle une variation de température à la surface du sol se fait sentir pendant une période de 12 heures. Sachant que la température initiale du sol est de 4°C et que la température tombe brutalement à –4°C, déterminer la profondeur à laquelle pénètre la température du point de congélation. On considérera un sol sec : $\rho = 1700\ kg.m^{-3}$; $c_p = 840\ J.kg^{-1}.K^{-1}$; $\lambda = 0,4\ W.m^{-1}.K^{-1}$.

11. Isolation d'une manipulation

On désire réaliser une manipulation légère (faible inertie) de laboratoire devant se dérouler sur une longue période de temps à une température comprise entre 15 et 25°C. Ces conditions sont aisément remplies dans la journée où la température se maintient autour de 20°C mais la nuit, du fait de l'arrêt du chauffage pendant 12 heures, la température peut descendre à 10°C. Aussi veut-on réaliser une régulation statique du système en enfermant la manipulation dans une enceinte. On dispose de deux matériaux : un acier inoxydable et du polystyrène expansé. Le coefficient d'échange h entre les parois de l'enceinte et l'ambiance est $h = 10\ W.m^{-2}.°C^{-1}$. Comment dimensionner de manière raisonnable les parois de l'enceinte ?

Données : Acier inoxydable : $\rho = 7700\ kg.m^{-3}$; $c_p = 460\ J.kg^{-1}.K^{-1}$; $\lambda = 25\ W.m^{-1}.K^{-1}$.
Polystyrène : $\rho = 50\ kg.m^{-3}$; $c_p = 1250\ J.kg^{-1}.K^{-1}$; $\lambda = 0,04\ W.m^{-1}.K^{-1}$.

12. Gel des conduites d'eau dans un sol humide

On reprend l'exercice 10 dans le cas où le sol est humide ($\rho = 1700\ kg.m^{-3}$; $c_p = 840\ J.kg^{-1}.K^{-1}$; $\lambda = 0,4\ W.m^{-1}.K^{-1}$) et contient w = 10% d'eau en masse. La chaleur de fusion de la glace est $L_f = 333\ kJ.kg^{-1}$.

1. Ecrire le problème à résoudre dans les zones gelées ($0 < x < X(t)$) et non gelée ($X(t) < x$), les conditions aux limites en x = 0 et $x \rightarrow \infty$ et les conditions à vérifier à l'interface X(t) entre les deux zones.
2. Montrer que l'on peut chercher la solution pour le champ de température sous la forme :
   $\frac{T - T_0}{T_f - T_0} = A\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\,t}}\right)$ dans la zone gelée
   $\frac{T - T_0}{T_f - T_0} = B\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\,t}}\right)\right]$ dans la zone non gelée
   où x est la profondeur calculée à partir de la surface du sol, $T_i = 4°C$ la température initiale du sol, $T_f = 0°C$ la température de congélation et a la diffusivité thermique de sol. A et B sont des constantes à déterminer.
3. En considérant les conditions à l'interface X(t), montrer que nécessairement $X(t) = 2\,\delta\sqrt{a\,t}$ où δ est une constante vérifiant l'équation transcendante : $\sqrt{\pi}\ Sn\ \delta = \frac{1}{\exp(\delta^2)\,\mathrm{erf}(\delta)} - \frac{\theta}{\exp(\delta^2)\left[1 - \mathrm{erf}(\delta)\right]}$
   Où $\theta = \frac{T_i - T_f}{T_f - T_0}$ et $Sn = \frac{w\,L_f}{c_p\,(T_f - T_0)}$ est le nombre de Stephan-Neumann.
4. Résoudre l'équation transcendante précédente en supposant a priori δ petit.
5. Déterminer la profondeur à laquelle pénètre la température du point de congélation.

13. Paroi coupe-feu

Une paroi coupe-feu doit répondre aux exigences suivantes : à partir de la température ambiante, si du côté chaud, la température s'accroît soudainement de 700 K, la température du côté froid ne doit pas monter de plus de 140 K. Quelle doit être l'épaisseur de la paroi (de diffusivité thermique a = 5.10^{-7} $m^2.s^{-1}$) pour répondre à cette condition au bout de respectivement 3, 6 ou 12 heures ?

14. Incendie d'une poutre en bois

Pour lutter contre les incendies, il est nécessaire de connaître comment des poutres en bois peuvent supporter le feu avant de s'enflammer. Les poutres sont longues de section droite 100 x 100 mm^2 et initialement à la température uniforme de 16°C. A l'instant où se déclare le feu, les poutres sont exposées à une température de 650°C et le coefficient de transfert convectif vaut h = 12 W m^{-2} $°C^{-1}$. Evaluer le temps avant que le bois n'atteigne sa température d'inflammation de 427°C. Les propriétés physiques du bois sont les suivantes : ρ = 800 $kg.m^{-3}$; cp = 2400 $J.kg^{-1}.K^{-1}$; λ = 0,3 $W.m^{-1}.K^{-1}$.

15. Traitement thermique d'un train d'atterrissage

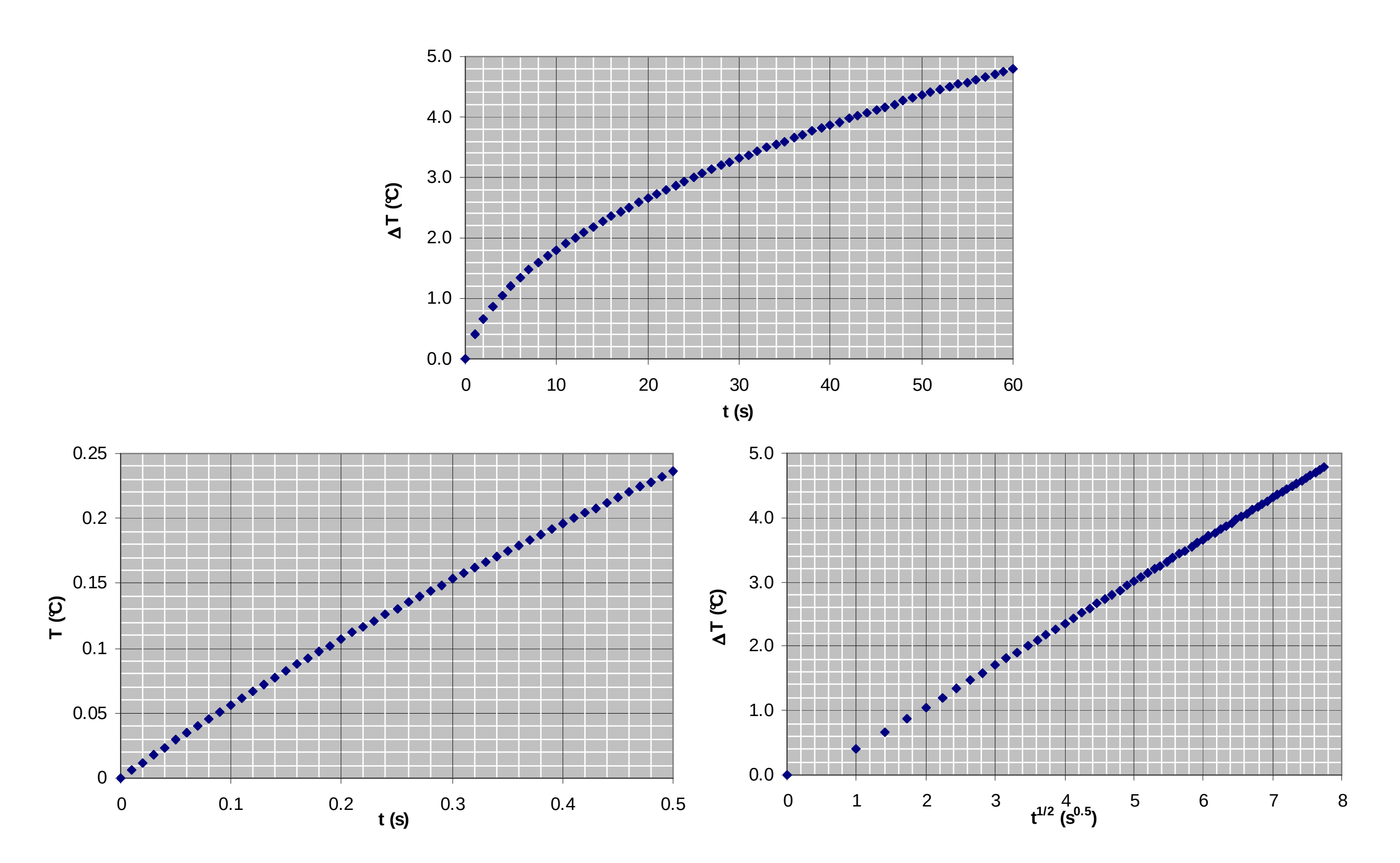
Le traitement thermique d'un train d'atterrissage consiste à refroidir rapidement la pièce pour obtenir une structure métallique et des caractéristiques mécaniques satisfaisantes. On sait par ailleurs que la structure obtenue est satisfaisante pour tout point ayant atteint ou dépassé une vitesse de refroidissement critique de 800 $°C.s^{-1}$ au voisinage de 250 °C. Quelle est l'épaisseur de la couche traitée thermiquement si l'on admet que le refroidissement est réalisé en imposant une température constante de 20°C à la surface de la pièce initialement portée à la température uniforme de 470°C ? La pièce est en aluminium et on l'assimilera à un cylindre de 60 cm de diamètre et de 3 m de haut. On abordera les calculs en supposant l'épaisseur de la couche traitée très petite devant le rayon du cylindre (on vérifiera cette hypothèse a posteriori).

16. Modélisation du plan chaud

Le but de la méthode du plan chaud est de mesurer l'effusivité thermique d'un matériau. La méthode consiste à insérer un élément chauffant plan dont on mesure l'évolution de la température entre deux échantillons de grande épaisseur du matériau à caractériser. On lui envoie un échelon de tension qui provoque le dégagement d'un flux de chaleur φ_0. La chaleur produite diffuse dans les échantillons et on enregistre l'évolution de la température T(t) de l'élément chauffant au cours du temps.

1. Ecrire à l'aide de la méthode des quadripôles l'expression de la transformée de Laplace de cette température. On considérera que la température est uniforme dans l'élément chauffant de masse 2m et de capacité calorifique c et que tout le flux est produit sur sa surface médiane ; on notera Rc la résistance thermique de contact entre l'élément chauffant et la sonde.
2. Etudier en utilisant des développements limités les comportements asymptotiques de cette température. En déduire une méthode simple de détermination de l'effusivité.
3. Estimer les valeurs de E, Rc et mc à partir du thermogramme ci-dessous (représenté dans plusieurs systèmes d'axes) obtenu sur du PVC d'épaisseur 1cm.
4. Montrer qu'au bout de 60 s la condition du milieu semi-infini est toujours valable. On supposera que la face non chauffée de l'échantillon est parfaitement isolée.
5. Ecrire la matrice de sensibilité pour une relation linéaire en $\tau = t^{1/2}$ de la forme $T(\tau) = k_0 + k_1 \tau$ et calculer la matrice de covariance des erreurs d'estimation de k_0 et de k_1.
6. En déduire l'écart type de l'erreur d'estimation sur E si l'écart type sur les mesures de température est de 0,05°C et en supposant que l'approximation réalisée au temps longs n'induit pas de biais (modèle exact).

Données : Elément chauffant de surface 20,3 cm^2, de résistance électrique R = 40,5 Ω alimenté sous une tension U = 6V. Diffusivité thermique du PVC mesurée par méthode Flash : a = $1,2.10^{-7}$ $m^2.s^{-1}$.



17. *Modélisation du fil chaud*

Le but de la méthode du fil chaud est de mesurer la conductivité thermique d'un matériau. La méthode consiste à insérer un fil chauffant dont on mesure l'évolution de la température entre deux échantillons de grande épaisseur du matériau à caractériser. On lui envoie un échelon de tension qui provoque le dégagement d'un flux de chaleur φ_0. La chaleur produite diffuse radialement dans les échantillons et on enregistre l'évolution de la température $T_m(t)$ de l'élément chauffant au cours du temps.

La modélisation de ce transfert de chaleur permet de calculer l'évolution de la température T(t) au centre de l'échantillon. On applique une méthode d'estimation de paramètres pour calculer les valeurs de :

- La conductivité thermique λ,
- La capacitance thermique $(mc)_s$ du fil chauffant,
- La résistance de contact R_c à l'interface fil/échantillon,

qui minimisent l'écart entre les courbes T (t) théoriques et $T_m(t)$ expérimentales.

1. Ecrire à l'aide de la méthode des quadripôles l'expression de la transformée de Laplace de cette température. On considérera que la température est uniforme dans l'élément chauffant.
2. Etudier en utilisant des développements limités les comportements asymptotiques de cette température. En déduire une méthode simple de détermination de la conductivité thermique.

Transfert de chaleur par rayonnement

18. Eclairement solaire

En supposant que le soleil rayonne comme un corps noir à la température de 5762 K et en ne considérant que les échanges radiatifs Terre / Soleil :

1. Calculer la fraction de flux émise dans le domaine du rayonnement visible.
2. Calculer l'éclairement solaire sur 1 m^2 de la surface de la terre.
3. Calculer la température moyenne de la terre.

Données : Rayon du Soleil : 696 700 km ; Distance Terre / Soleil : 149 637 000 km.

19. Transmission du rayonnement

Une plaque de verre de 100 cm^3 est utilisée pour observer le rayonnement provenant d'un four. Le facteur de transmission du verre est nul excepté dans la bande 0,2 à 3,5 µm où il vaut 0,8. Le facteur d'émission est pris égal à 0,3 jusqu'à 3,5 µm et 0,9 au-delà. En admettant que le four est un corps noir à 1800°C, calculer l'énergie totale absorbée par le verre et l'énergie transmise.

20. Rayonnement dans un four

Quel est le flux de chaleur par mètre de longueur que reçoit un tube en métal de 8 cm de diamètre extérieur à 200°C placé dans un tunnel en briques réfractaires à 1200°C, ce tunnel ayant une section

1. Très grande par rapport au diamètre du tube.
2. Carrée de 12 cm de côté.

21. Influence du rayonnement sur les mesures de température

1. Un thermomètre de diamètre d_t ayant une émissivité $\varepsilon_t = 0{,}8$ est utilisé pour mesurer la température d'un gaz transparent s'écoulant dans une grande conduite dont les parois sont à 250°C. La température réelle du gaz est 500°C.
2. Calculer la température indiquée par le thermomètre sachant que le coefficient d'échange convectif est de 122 W m^{-2} $°C^{-1}$.
3. Recalculer cette température si le thermomètre est recouvert de papier d'aluminium d'émissivité 0,1.

On considère maintenant que le thermomètre précédent est protégé contre le rayonnement par un écran cylindrique mince de diamètre $d_e = 4\ d_t$ et de facteur d'émission $\varepsilon_e = 0{,}3$. En admettant pour T_p, T_g, ε_t et h_c les mêmes valeurs numériques qu'en a) et pour h_e (coefficient de transfert par convection sur chaque côté de l'écran) la valeur 114 W m^{-2} C^{-1} , évaluer la nouvelle valeur de la température indiquée par le thermomètre.

22. Echange radiatif dans un local

1. Un local parallélépipédique de dimensions 6 x 4,5 m au sol par 3 m de hauteur est chauffé par son plancher porté à 35°C. Les murs et le plafond étant à 20°C, évaluer le flux net échangé :
   - Entre le plancher et un élément de surface de 1 m^2 placé au centre du plafond.
   - Entre le plancher et le plafond.
   - Entre le plancher et l'ensemble des murs et du plafond.
2. On considère maintenant que le local a des murs parfaitement isolés. Le sol est à 35°C, le plafond à 20°C. Calculer le flux radiatif net échangé entre le plancher et le plafond ainsi que la température, supposée uniforme, de la surface intérieure des quatre murs verticaux

23. Refroidissement d'un théière

Une théière a la forme d'un cylindre de hauteur L = 20 cm et de diamètre D = 10 cm. Elle est posée sur un support en liège d'épaisseur 2 cm que l'on considérera comme parfaitement isolant. On la remplit avec de l'eau bouillante à la température T = 100°C. La température des parois de la théière sera supposée égale à 100°C après remplissage par l'eau. La température du milieu environnant est T_{air} = 25°C. L'émissivité des parois est égale à 0,8. On considérera que lors du refroidissement les températures de l'eau et de la paroi restent égales et uniformes.

1. Calculer le flux de chaleur perdu par convection naturelle juste après remplissage.
2. Calculer le coefficient d'échange équivalent par rayonnement et le flux de chaleur perdu par rayonnement juste après remplissage.
3. En supposant les coefficients de transfert constants, calculer le temps au bout duquel la température de l'eau sera égale à 50°C.
4. Vérifier la validité des hypothèses :
   - Pertes par le fond négligeables,
   - Coefficient de rayonnement constant.
5. Reprendre le calcul si la théière est réfléchissante d'émissivité 0,1.
6. Reprendre le calcul des pertes globales si les parois sont constituées de deux cylindres métalliques co-axiaux d'émissivité 0,1 pour les surfaces intérieures et de 0,8 pour la surface externe et de diamètre respectifs 0,2m et 0,21m (type vase Dewar). On a réalisé un vide poussé entre les deux cylindres qui permet d'abaisser le coefficient de convection à 0,5 $W.m^{-2}.°C^{-1}$. On considérera que la température de la paroi externe est peu différente de la température du milieu environnant. On justifiera cette hypothèse a posteriori.

Données : Coefficient d'échange par convection naturelle entre la théière et l'air : h_{ce} = 10 $W.m^{-2}.°C^{-1}$.

24. Rayonnement de gaz

Un mélange de 40% de CO_2 et 60% de H_2O en volume est contenu dans une enceinte cubique de 1 m de côté, le mélange est à 1 atm et à 800 K. Les parois de l'enceinte sont à 400 K et ont une émissivité ε_p = 0,8. Calculer le flux de refroidissement nécessaire pour maintenir les parois à 400 K.

25. Capteur solaire couvert

Une tôle noircie de dimensions 2 m x 1m, d'épaisseur faible, isolée par 5 cm de polystyrène sur sa face inférieure est exposée à un ensoleillement de 800 $W.m^{-2}$. La température extérieure est de 28°C, la vitesse du vent est de 2 $m.s^{-1}$. La température de rayonnement du ciel est égale à 16°C.

1. Calculer la température atteinte par la tôle si l'on ne tient pas compte de la convection.
2. La vitesse du vent créé une convection forcée de coefficient donné par : $h_{vent} = 5,7 + 3,8\ u_{vent}$. Calculer la température de la tôle en prenant en compte les pertes convectives.
3. Calculer les pertes conductives vers le bas et les comparer aux pertes globales vers le haut.
4. Calculer le coefficient global (convection + rayonnement) de pertes vers le haut.
5. On fait circuler dans l'espace de 1cm entre la tôle et le polystyrène un débit d'eau entrant à la température de 20°C avec une vitesse de 0,5 $m.s^{-1}$. Calculer le coefficient d'échange par convection entre l'eau et la tôle.
6. Calculer la température de sortie de l'eau si l'on suppose que le coefficient global de pertes vers le haut est de 18 $W.m^{-2}.°C^{-1}$.
7. On réalise un capteur solaire couvert en plaçant une vitre au-dessus de la tôle. On suppose que la vitre est entièrement opaque vis-à-vis du rayonnement IR (λ > 2,5 µm) et entièrement transparente vis-à-vis du rayonnement solaire (λ < 2,5 µm). Expliquer en établissant le bilan thermique de la tôle avec et sans vitre pourquoi le coefficient global de pertes d'un capteur couvert est inférieur à celui d'un capteur non couvert.

Reprendre la question 6 en considérant un coefficient global de pertes de 8 $W.m^{-2}.°C^{-1}$.

Transfert de chaleur par convection

26. Isolation d'une conduite

De l'eau glacée à 8°C circule à la vitesse de 0,5 m.s^{-1} à l'intérieur d'un tube en acier de diamètres 20/27 mm. Ce tuyau est isolé par une couche d'isolant de 10 mm d'épaisseur. La température de l'air ambiant est égale à 25°C. La longueur du tuyau est de 30 mètres.

1. Calculer la valeur du coefficient de convection interne h_i si la vitesse de l'eau est de 1 m.s^{-1}.
2. Calculer le flux de chaleur gagné par le tube.
3. Calculer la température interne du tube.
4. Calculer l'échauffement de l'eau lors de son passage dans le tube.

Données : Coefficient de convection externe h_e = 10 W m^{-2} °C^{-1} , $\lambda_{isolant}$ = 0,35 W.m^{-1}.°C^{-2}.

27. Ecoulement sur une plaque

Un fluide s'écoule parallèlement à une paroi plane de 0,4 m de long et de 0,1 m de large. Hors de la couche limite, la vitesse est de 1 m.s^{-1} et la température du fluide est supérieure de 20°C à la température de la paroi supposée constante.

1. Calculer et comparer les coefficients de transfert de convection locaux obtenus pour l'air et pour l'eau en x = 0,1 m .
2. Calculer les coefficients de transfert de convection moyens obtenus pour l'air et pour l'eau entre x = 0 et x = 0,1 m .
3. Calculer les coefficients de transfert de convection (local et moyen) obtenus en x = 0,2 m avec de l'eau circulant à la vitesse de 10 m.s^{-1}. Comparer avec les coefficients obtenus en x = 0,2 m pour une vitesse d'écoulement d'eau de 1m.s^{-1}.
4. Calculer la force locale et moyenne exercée par le fluide sur la paroi en x = 0,2 m dans le cas d'un écoulement d'eau à une vitesse de 1 m.s^{-1}.
5. Quelle devrait-être la vitesse de circulation de l'air pour que le régime devienne turbulent sur la paroi ?

28. Echauffement de l'air dans un capteur solaire

De l'air circule un capteur solaire ayant la forme d'un un conduit rectangulaire de largeur 1 m, de hauteur 10 cm et de longueur 6 m. La vitesse de l'air est de 2 m.s^{-1}, sa température de 30°C.

1. Calculer le coefficient de transfert par convection h entre l'air et la paroi supérieure du conduit.
2. Le conduit est dans un caisson isolé surmonté d'une vitre ce qui permet de maintenir la paroi supérieure à 50°C en période d'ensoleillement. Calculer le flux échangé avec la paroi supérieure si celle-ci est maintenue à 50°C et si les autres parois sont parfaitement isolées.
3. Calculer la température de sortie de l'air.
4. Reprendre le calcul si la largeur est de 2m et la longueur de 3m. Quelle est la meilleure géométrie ?

29. Refroidissement d'eau dans un tube

Une conduite en acier inoxydable de diamètre intérieur d_i = 30 mm et de diamètre extérieur d_e = 40 mm est parcourue par un courant d'eau à la vitesse moyenne de 3 m.s^{-1} et à la température de 80°C. Sa paroi interne est recouverte d'un mince dépôt conduisant à une résistance thermique de 2.10^{-3} m^2.°C.W^{-1} appelée résistance thermique d'encrassement. A l'extérieur du tube d'acier circule normalement à la conduite de l'air à la vitesse de 8 m.s^{-1} et à la température de 20°C.

1. Calculer les coefficients d'échange par convection intérieur h_i et extérieur h_e.
2. Calculer chaque résistance thermique séparant l'eau et l'air et donner le schéma électrique équivalent.
3. Calculer la température sur la partie externe du dépôt et sur les parois externes et internes du tube d'acier.
4. Calculer le refroidissement subi par l'eau après un parcours de 10 m dans le tube si la température de l'air reste constante. Qu'en pensez-vous si le but est de refroidir l'eau ?

30. Convection naturelle sur une plaque

De l'air à 16°C est au contact d'une plaque plane verticale de hauteur L maintenue à 60°C.

1. Tracer la courbe donnant les variations du coefficient de convection naturelle h_c avec la hauteur L de la plaque dans le domaine 0 - 1 m.
2. Comparer les valeurs de h ainsi trouvées avec celles des formules approchées suivantes applicables pour de l'air à température ordinaire et à la pression atmosphérique normale :
   a. laminaire : $h_c = 1{,}42\ (\Delta T / L)^{0,25}$
   b. turbulent : $h_c = 1{,}31\ (\Delta T)^{0,33}$
3. Pour les mêmes conditions de température (on suppose les parois de l'enceinte à 16°C), on déterminera le coefficient superficiel de rayonnement h_r en fonction de ε_p, coefficient total d'émission de la plaque.
4. Pour une plaque de hauteur L = 0,6 m, on tracera la courbe $\frac{h_r}{h_c} = f\left(\varepsilon_p\right)$. Conclusion ?

31. Convection avec condensation

Déterminer le coefficient d'échange vapeur-paroi lors de la condensation de 60 kg h^{-1} de vapeur d'un fluide synthétique pour le transfert de chaleur sur un tube de 60 mm de diamètre extérieur et 1,5 m de long. Le fluide a les caractéristiques suivantes à la température de paroi (264°C) :

λ = 0,15 kcal.h^{-1}.°C^{-1} ; μ = 0,3.10^{-3} Pl ; ρ = 850 kg.m^{-3} ; ΔH = 60 kcal.kg^{-1}

Température de rosée : 320°C.

On déterminera h successivement pour un tube vertical et pour un tube horizontal.

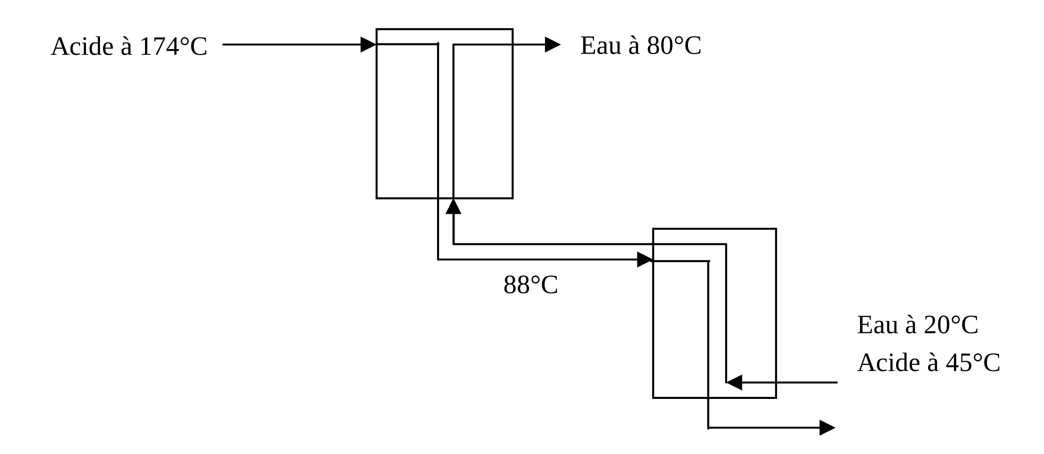
Les échangeurs de chaleur

32. Echangeurs en série

De l'acide sulfurique circule avec un débit de 4500 kg h^{-1} dans un circuit qui comprend deux réservoirs en série où il est en contact, par agitation, avec des serpentins à contre-courant de l'acide. Sachant que le 1er réservoir traversé par l'acide a un coefficient global de transfert h_1 = 1000 kcal h^{-1} m^{-2} °C^{-1} et le second un coefficient h_2 = 630 kcal.h^{-1}.m^{-2}.°C^{-1}, calculer la surface totale de refroidissement.

Données :

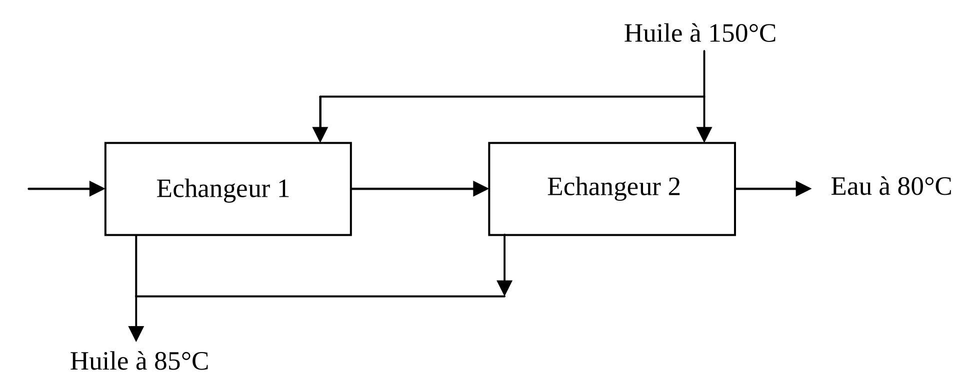
- Acide sulfurique : c_p = 0,36 kcal·kg^{-1}.°C^{-1}
- Les températures aux différents points du circuit sont indiquées dans le schéma ci-après :



33. Association optimale d'échangeurs

Un échangeur tubulaire à contre-courant est utilisé pour chauffer 1,25 kg.s^{-1} d'eau de 35 à 90°C en refroidissant une huile (c_p = 2,0 kJ.kg^{-1}.°C^{-1}) de 150 à 85°C. Le coefficient global de transfert de l'échangeur est h = 850 W m^{-2} °C^{-1}.

On veut comparer les performances de cet échangeur avec celles de deux petits échangeurs à contre-courant, les circuits d'eau étant placés en série et les circuits d'huile en parallèle :



Le débit d'huile est le même dans les deux petits échangeurs. Le coefficient global de transfert est également identique et vaut h = 850 W.m^{-2}.°C^{-1}.
Si le m^2 d'un petit échangeur coûte 20% de plus que le m^2 du grand échangeur, quelle est la solution la plus économique : un grand échangeur ou deux petits ?

34. Comparaison de différents types d'échangeurs

Déterminer pour chacun des cas suivants la surface d'échange nécessaire pour refroidir en continu 30000 kg.h^{-1} d'une solution de 66°C à 39°C en utilisant 29500 kg.h^{-1} d'eau de refroidissement à une température de 12°C.

1. Echangeur tubulaire simple à co-courant
2. Echangeur tubulaire simple à contre-courant
3. Echangeur de type 1-2
4. Echangeur de type 2-4
5. Echangeur à courants croisés à 2 fluides non brassés.

Données : $c_{p\ solution}$ = 0,9 kcal.kg^{-1}.°C^{-1} ; coefficient global de transfert : h = 2100 kcal.h^{-1}.m^{-2}.°C^{-1}

35. Echangeur récupérateur d'énergie

L'air vicié extrait d'un bâtiment à 20°C à raison de 50 000 kg.h^{-1} traverse un échangeur économiseur servant à pré-refroidir l'air neuf admis avec un débit identique. L'échangeur est un appareil à plaques planes et à courants croisés sans brassage. Sa surface d'échange est de 50 m^2 et son coefficient global de transfert est de 20 W.m^2.°C^{-1}.

1. Calculer l'efficacité de l'échangeur et la température de sortie de l'air neuf si sa température d'entrée est de 35°C.
2. Calculer la température de sortie de l'air vicié et la puissance thermique récupérée dans cet échangeur.

36. Encrassement d'un échangeur

Après un essai de fonctionnement fait sur un échangeur à un passage en enveloppe et deux passages en tubes, on dispose des données suivantes :

- Intérieur des tubes : huile en écoulement turbulent :
  débit = 2270 kg.h^{-1} ; c_p = 0,5 kcal.kg^{-1}.°C^{-1}, $\theta_{entrée}$ = 71°C ; θ_{sortie} = 38°C.
- Extérieur des tubes : eau : $\theta_{entrée}$ = 16°C ; θ_{sortie} = 27°C.

On souhaite prédire le fonctionnement de cet échangeur avec un débit d'huile réduit au ¾ du précédent et une température d'entrée de 98°C. Calculer la température de sortie d'huile pour un débit et une température d'eau identique. On supposera que le coefficient de transfert côté huile est faible devant celui côté eau.

37. Calcul d'un échangeur à courants croisés

On souhaite dimensionner un échangeur gaz-liquide à courants croisés parcouru par un débit d'eau de 8,33 kg.s^{-1} que l'on chauffe de 20 à 90°C à partir de 41,67 kg.s^{-1} d'air à 300°C.

On dispose pour cela de tubes de diamètre extérieur 50 mm et d'épaisseur 5 mm que l'on souhaite monter en quinconce équilatère avec un entraxe de 75 mm. L'eau circule à l'intérieur des tubes et l'air chaud circule perpendiculairement aux tubes.

Calculer pour une longueur maximale de tubes de 6 m :

1. Le nombre de nappes de tubes.
2. Le nombre de tubes par nappe.